ENSAIOS

SOBRE

LOGICA

POR

AGLIBERTO XAVIER

RIO DE JANEIRO
Papelaria Macedo—Quitanda, 64
1908

Biblioteca da Faculdade de Direito
da Universidade de São Paulo
N.º de ordem
29667
Classificação
Pag. do Registro
L. 8 - pag. 247
Modo de aquisição
Compra

INDICE

	PAGS.
Prefacio.....	I a IV
Apreciação geral da Logica Positiva.....	3
Razão Abstracta e Razão Concreta. Concepção de lei natural.....	19
Refutação do Materialismo mathematico.....	43
Dos ensinamentos logicos que resultam do Calculo e da Geometria.....	59
Dos ensinamentos logicos que resultam da Mecanica geral.....	87
Errata.....	122

Prefacio

O trabalho que se vae ler representa uma contribuição modesta e espontanea para melhorar o ensino em nosso paiz. Redigindo-o, não tivemos em mente fazer um resumo de logica, pelo contrário, esforçámo-nos por demonstrar que o conhecimento do methodo é inseparavel do da doutrina. Donde se infere que se não poderia fazer uma exposição regular e systematica de logica sem percorrer, embora syntheticamente, toda a sciencia fundamental, onde ella se manifesta com maior evidencia e vigor. A simplicidade dos phenomenos de numero, extensão e movimento, e a universalidade dos meios empregados no seu estudo, conferem naturalmente á mathematica a missão de elaborar os methodos que as outras sciencias utilisam. Alem da de-

monstração dessa verdade, quizemos assignalar tambem certos resultados importantes que bastariam para fazer sentir a necessidade da cultura mathematica.

Este trabalho será seguido de outro tendo por fim apresentar resumidamente a theoria do cerebro esboçada por Gall e realizada por Augusto Comte. De sorte que ambos concorrem para descrever, não só o apparelho da nossa meditação mas ainda a marcha dessa operação, salientando os artificios com que a intelligencia suppre as suas proprias lacunas e augmenta a sua fôrça.

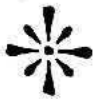
Mas cumpre notar e nunca perder de vista que essa exposição, por mais clara e profunda, não é por si mesma o exercicio que convem ao apparelho cerebral. Expondo taes assumptos, representamos o papel do anatomista que descrevesse todo o systema muscular do homem, indicando os movimentos que cada musculo realisa por si só e os que podem resultar do concurso simultaneo de alguns delles. Seria util trabalho para fundamentar um curso racional de gymnastica, mas não poderia ser a propria gymnastica.

E' incontestavel que, para se convencerem do que expomos neste trabalho, os nossos leitores farão uma gymnastica intellectual guiada pelo nosso texto, mas esse exercicio não é sufficiente para o fim que temos em vista. O presente livrinho, ousamos acreditar, despertará no espirito do leitor attento o desejo de exercitar a sua intelligencia pela meditação das diversas partes da mathematica, e nessas condições elle irá encontrar em certas obras, taes como o *Methodo para aprender a contar*, de Condorcet, a *Algebra* e a *Geometria*, de Clairaut, a *Geometria analytica*, de Augusto Comte e a *Theoria das funcções analyticas* de Lagrange, as melhores e mais puras applicações da logica positiva. A realisação desse desejo dar-se-á tanto mais facilmente quanto maior fôr a cultura que o leitor tiver da sciencia fundamental.

Conhecendo já toda a mathematica, poderá elle, ainda mais facilmente, desprender-se do objecto para attender ao methodo. Quanto aos professores de mathematica, estes podem, mais que ninguem, concorrer para melhorar a mentalidade dos seus discipulos, por um escrupuloso ensino,

visando mais o methodo que a propria doutrina. Felizmente, já possuimos em nosso paiz professores dessa sciencia que nada fazem invejar os que professam noutros paizes; a sua acção intellectual, social e mesmo moral tem-se accentuado assaz em nosso meio, e a historia contemporanea da nossa Patria já o assignala de modo glorioso.

AGLIBERTO XAVIER.



APRECIAÇÃO GERAL

DA

Logica Positiva

Consideremos o exercicio do espirito humano em todas as espheras da sua actividade, desde as mais ingenuas concepções ficticias em que o sentimento suppre largamente as lacunas intellectuaes, até ás mais severas concepções scientificas e philosophicas ; examinemos minuciosamente tanto as mais ousadas construcções poeticas como os mais rigorosos calculos astronomicos, e veremos sempre as tres regiões do cerebro, a região affectiva, a região especulativa e a região activa entrando em acção.

Um sentimento preponderante se torna indispensavel para estimular o apparelho cerebral e dar ás nossas concepções a

consistencia que ellas não poderiam ter de outro modo. A intelligencia, por meio das *imagens*, vem dar a necessaria *clareza* á inducção. Finalmente, o caracter tambem toma parte nessa operação, fornecendo os *signaes* necessarios á *precisão* que toda deducção exige. Eis como as tres partes do cerebro concorrem simultanea e harmonicamente em quaesquer das nossas concepções reaes ou ficticias, theoricas ou práticas.

Sob a influencia do espirito metaphysico, esse conjuncto de meios logicos é quasi completamente desconhecido, porque se reduz ao emprego demasiado exclusivo dos signaes, pelo abuso da deducção.

Desembaraçado do vicio ontologico, Augusto Comte pôde perceber nitidamente os tres elementos logicos; mas, peado ainda por preconceitos scientificos, definiu a logica positiva a principio—*o conjuncto dos meios proprios a desvendar-nos as verdades que nos convêm*—desprezando assim o dominio da ficção e da esthetica, como se não comportasse nenhuma regra. Mais tarde, emancipado tambem da propria sciencia, tanto quanto da theologia e da metaphysica, e guardando desses regimes

apenas o que elles têem de utilmente incorporaveis ao estado normal da razão humana, definiu-a: *o concurso normal dos sentimentos, das imagens e dos signaes, para inspirar-nos as concepções que convêm ás nossas necessidades moraes, intellectuaes e physicas.*

Cada um desses elementos póde tornar-se o principal instrumento da nossa razão nesta ou naquella concepção, conforme o modo de philosophar. Assim, em certos casos, a logica dos sentimentos torna-se a principal, como naquelles em que se trata de uma construcção esthetica ou de uma utopia moral. E' portanto essa a logica que adquire mais importancia na sciencia final, isto é, na Moral positiva. Em outras concepções, é a inducção ou a deducção que domina, e, por conseguinte, o emprego das imagens ou o uso dos signaes que prevalece.

Cada phase da evolução preparatoria da Humanidade, empregando a sua maneira especial de philosophar, institue a sua logica correspondente. O fetichismo emprega quasi exclusivamente a logica constructiva ou affectiva, animando todos os

seres que cercam o homem, attribuindo tudo a affeições analogas ás suas. Com effeito, forçado a instituir uma theoria do mundo desde o começo da sua existencia, o homem carece para isso de factos observados, mas a observação dos factos por sua vez presuppõe uma theoria qualquer. Dado esse circulo vicioso, reconhecida assim a insufficiencia da intelligencia, o sentimento suppre a lacuna intellectual pelo methodo puramente subjectivo.

Ainda que esta logica não seja exclusivamente empregada em todas as nossas concepções, mesmo no regime normal, o sentimento torna-se entretanto o motor supremo de todos os nossos pensamentos, visto que é ao mesmo tempo a sua fonte e o seu destino. Essa influencia do sentimento não escapou aos pensadores catholicos, que preconisaram sempre a subordinação do espirito ao coração. O eminente Vauvenargues assignalou tal submissão de um modo brilhante em diversas maximas para sempre inolvidaveis. Dellas destacamos as seguintes: *Os grandes pensamentos vêm do coração. Ninguem está mais sujeito a êrro do que aquelle que só age pela reflexão.*

A convicção do espirito nem sempre acarreta a do coração.

Muita gente não afeita á sciencia positiva, mórmente á sciencia do homem, encara o preceito catholico da subordinação do espirito ao coração como um rebaixamento da intelligencia para manietal-a ás exigencias de um dogma obsoleto. E' um erro manifesto semelhante idéa. Ao contrario, o genio catholico apanhou com excepcional argucia uma lei fatal, tão incoercivel como qualquer lei cosmologica,—*que a nossa intelligencia e subordinada aos nossos sentimentos, quaesquer que sejam, altruistas ou egoistas,*—servindo apenas para esclarecel-os, mas offuscada por elles muitas e muitas vezes, principalmente quando somos dominados pelo egoismo.

Reconhecendo então essa lei suprema, reconhecendo com insigne mestria os ardilosos artificios de que se serve o egoismo para empanar a intelligencia ainda a mais lucida, reconhecendo finalmente o jugo pesado e poderoso que as nossas paixões pessoaes exercem sobre a nossa razão, subordinando-se consciente e intelligentemente a essa contingencia moral, o genio catho-

lico procura apenas substituir nos grandes pensamentos o egoismo pelo altruismo ou, segundo a sua concepção theologica, a natureza pela graça.

Como os grandes inventores da industria moderna, que se submettem habilmente ás leis physicas para se apoderarem das forças colossaes da natureza em beneficio dos seus engenhos e das suas machinas, os eminentes pensadores catholicos, subordinando-se tambem a uma lei natural, submettem a razão á virtude e ás affeições nobres, porque só os sentimentos generosos inspiram pensamentos geraes. Por isso, o sublime auctor da *Imitação de Christo* proclamou a verdade soberana: *Omnis ratio, et naturalis investigatio fidem sequi debet, non præcedere nec infringere.*

Que a nossa razão e as nossas investigações naturaes estão sujeitas á fé, isto é, ao que sabemos, ao que cremos, ao que presumimos, é uma lei fatal do nosso cerebro, e tal que não ha artificio que a desvie nem astucia que a illuda. Mas o que é perfeitamente harmonico com essa mesma lei é que, em vez de idéas estreitas creadas por principios acanhados e egoistas, pode-

mos substituir idéas geraes, inspiradas em sentimentos generosos. E então, sujeitas sempre á mesma lei, a razão e a investigação natural trazem os signaes brilhantes e inoffuscaveis da realidade, belleza e generalidade dos principios.

Resumindo toda a sabedoria do passado e submettendo-a á apreciação dos seus principios positivos, o grande Innovador moderno resumiu a harmonia mental na seguinte lei:

Agir por affeição e pensar para agir.

A passagem do fetichismo ao theologismo assignala uma mudança brusca e radical na razão humana, porque, confundindo a actividade com a vida, o fetichismo anima todos os seres, e o theologismo, ao contrario, destitue os corpos de toda a actividade espontanea para attribuil-a a seres sobrenaturaes, passando assim da causalidade directa á causalidade indirecta. Comprehende-se então como a logica das imagens succedeu á logica dos sentimentos, secundando o polytheismo, quer nas suas multiplas e variadas concepções estheticas, quer na figuração da quantidade indefinida de deuses que representam os diversos pheno-

menos cosmicos e humanos, quer finalmente no concurso que prestou á intelligencia na pesquisa das relações invariaveis inaccessiveis á vontade dos deuses, isto é, constituindo o imperio do Destino. A inducção ficticia e esthetica preparou assim o apparecimento da inducção real.

Ao contrario do polytheismo, que resulta sempre da imaginação popular, todo o monotheismo provém de uma systematisação que só poderia ser pessoal, exigindo por conseguinte um revelador. Taes são os tres monotheismos: judaico, catholico e musulmano. A natureza desse regime mostra que elle se formou por toda parte referindo tudo a um sêr supremo, que satisfaz a todas as exigencias sociaes e moraes, e conciliando todos os factos observados por meio de deducções. O uso dos signaes adquire então todo o seu desenvolvimento no monotheismo, sob a influencia da discussão, que, prolongando-se durante toda a phase metaphysica, desvirtuou o uso da propria logica deductiva.

A combinação dos tres elementos da logica, presentida pela theocracia, como ensina Augusto Comte, foi inteiramente des-

conhecida durante toda a evolução intellectual da Grecia, que reduziu os recursos da logica ao emprego esclusivo dos signaes. E o proprio emprego desse elemento logico veio a tonar-se vicioso, visto que as regras metaphysicas do seu emprego consistiam mais em provar do que em achar.

Todos sabem que o caracteristico da vida animal, desde o infusorio até ao homem, é a sensibilidade e a contractilidade. Em todo o animal cada sensação determina uma contracção ou movimento. As especies, cujo apparelho cerebral é mais perfeito, guardam essa ligação, de modo que, dado um movimento, ellas têem a sensação subjectiva correspondente. Nesta ligação habitual entre o movimento e a sensação ou *imagem* é que consiste propriamente o *signal*.

Se se observar agora a ligação espontanea que tambem existe entre a imagem e o sentimento, comprehender-se-á a connexidade perfeita dos tres elementos logicos: sentimentos, imagens e signaes.

A bandeira de uma nação, por exemplo, que é um mero signal, desperta nos corações patrioticos a imagem querida da patria, e esta põe em jogo todos os sentimen-

tos civicos. Graças a essa intima ligação entre os signaes, as imagens e os sentimentos, é que a especie humana pôde crear a linguagem e esta exercer tão alta influencia, quer nas nossas meditações, quer nas nossas affeições. A linguagem mais apta a affectar o coração é justamente aquella em que a concisão do discurso, isto é, a precisão dos signaes se liga á assistencia regular das imagens—é a *poesia.*

Tomemos uma grande composição poetica, a Divina Comedia, por exemplo, e leiamol-a attentamente. Que observamos em nós mesmos? As palavras, ou signaes phonicos, despertadas por signaes graphicos traçados no papel, desenharem em nossa imaginação todas aquellas grandiosas imagens creadas pelo poeta, essas imagens por sua vez despertarem toda a serie de sentimentos que nos impressionam e deleitam.

E' na mathematica, no dominio da geometria geral, que se encontra a mais bella e fecunda combinação das imagens e dos signaes. Cada curva, como cada superficie, ali é representada por uma equação e, inversamente, toda equação a duas ou tres variaveis tem uma imagem geome-

trica. A resolução de um problema geometrico consiste pois numa transformação que, applicando-se a todas as equações, se applica a todas as curvas e superficies. Assim, os signaes vêm dar uma generalidade incomparavel ás theorias geometricas. Inversamente, passando toda transformação algebrica a ter uma significação geometrica, isto é, correspondendo a uma imagem, o calculo adquire uma clareza até então desconhecida.

Esse auxilio estranho das imagens nas deducções, bem como o inverso, dos signaes nas inducções, não tem sido bem percebido, nem mesmo pelos logisticos modernos mais notaveis. Assim vemos Stuart Mill e Alexandre Bain esforçarem-se em provar que a deducção nada mais é que uma inducção dissimulada.

Reduzir toda deducção a simples inducção ou, vice-versa, reduzir toda inducção á mera deducção, é um absurdo que consiste fundamentalmente em supprimir, num caso, a logica dos signaes e, no outro, a das imagens. A historia da mathematica e da physica apresenta-nos exemplos dessa dupla aberração. Procurando dis-

farçar a triplice base physica da mecanica, os geometras do seculo XVIII, ao contrario dos do seculo anterior, apresentaram as tres leis fundamentaes do movimento, tres leis inductivas, como deductivas. Muitos geometras têem tentado erigir uma physica, puramente mathematica, reduzindo deste modo muitas leis e theorias inductivas a simples deducção. Alguns physicos, ao contrario, procuram reduzir toda a physica a pura experimentação, sem attender a algumas deducções insophismaveis das suas leis fundamentaes. Assim procedendo, elles visam transformar a deducção em simples inducção.

Esses dois methodos são profundamente diversos, se bem que haja, mesmo em mathematica, muitas leis que podem ser aprehendidas quer induzindo quer deduzindo, sem nenhuma confusão. Hajam vista algumas leis da hydrostatica e da hydrodynamica.

A cultura desordenada da mathematica durante a phase mais anarchica da evolução humana, como acabamos de mostrar, fez prevalecer a deducção sobre a inducção e mesmo sobre a construcção. Com effeito,

sendo as inducções muito faceis em mathematica, passaram despercebidas, e, suppondo-se real o divorcio metaphysico do coração e do espirito, a logica constructiva foi desprezada. Mas a logica esthetica, muito mais conforme á synthese que a logica scientifica, procurou, ainda durante a phase anarchica, fazer prevalecer a construcção sobre a inducção e deducção. Foi mister que o espirito positivo attingisse a sciencia final, para que a preponderancia do coração sobre o espirito e o caracter podésse ser assignalado na fórmula que resume a logica positiva:

Induzir para deduzir a fim de construir.

A essas considerações sobre os elementos da logica positiva, é preciso reunir comparando os diversos attributos que lhes são inherentes.

A logica dos sentimentos é caracterisada pela sua *consistencia;* não é nem facultativa como a das imagens nem rapida como a dos signaes; affecta directamente a fonte e o destino dos nossos pensamentos; representa o surto primitivo da razão humana e serve de base ao methodo subjectivo ou constructivo; elabora não só as concepções

estheticas, mas tambem a sciencia final— a *Moral;* é o methodo para o estudo da *Humanidade.*

A logica das imagens, que dá a maior *clareza* ao pensamento, é facultativa e rapida, affecta directamente a intelligencia e secunda o methodo inductivo. E' por esse methodo que se fazem pesquisas sobre as sciencias que Augusto Comte abrangeu com a denominação de Physica (astronomia, physica propriamente dita e chimica). Esse estudo faz-nos conhecer a *Terra.*

A logica dos signaes, caracterisada pela *precisão*, serve de base ao methodo deductivo e affecta directamente o caracter. E' facultativa e ainda mais rapida que a logica das imagens. E' o methodo que prevalece na mathematica e que nos dá o conhecimento do *Espaço.*

Antes da grande operação philosophica de Augusto Comte, chamavam-se *mathematicas* a mathematica propriamente dita, a astronomia e a physica, de modo que a mathematica era uma especie de sciencia universal. Tal presentimento provinha da influencia que a mathematica exercia sobre todas as outras sciencias como methodo.

Mas o espirito dos geometras não logrou transformar esse presentimento em conhecimento real, desviado como estava, pela influencia ontologica que dominava ainda soberanamente.

Ao contrario, elle deixou-se arrastar pelo pensamento de que a mathematica abraçava todas as outras sciencias, porque todos os phenomenos se reduzem a questões de fórma, segundo o materialismo cartesiano, ou a questões de movimento, conforme o materialismo mais recente de Newton. Tendo reduzido a mathematica ao seu verdadeiro dominio, e apreciado convenientemente as suas tres partes, Augusto Comte pôde então reconhecer que o seu principal destino no conjuncto da educação encyclopedica é elaborar os methodos que devem ser empregados nas sciencias superiores. Erigindo a mathematica em logica positiva, elle attingiu um duplo fim, visto que consagrou o presentimento commum e real que reconhecia a universalidade do espirito mathematico, e corrigiu a tendencia metaphysica de fazer do methodo uma sciencia.

Razão Abstracta e Razão Concreta

Concepção de lei natural

A universalidade do espirito mathematico harmonisa-se de tal modo com a simplicidade dos phenomenos do numero, da fórma e do movimento, que nos permitte apreciar bem os methodos, sem que o objecto proprio do estudo seja sacrificado. Assim, nenhuma outra ordem de phenomenos póde patentear melhor os campos de acção e as variantes entre a razão abstracta e a razão concreta.

A differença entre a razão abstracta ou theorica e a razão concreta ou prática revela-se immediatamente pela simplicidade de uma e pela complicação da outra, embora ambas explorem o mesmo dominio. A razão theorica estuda os phenomenos, independentemente dos sêres correspon-

dentes, para descobrir as suas leis geraes, emquanto que a razão prática não os separa jámais dos corpos, cuja existencia pretende melhorar. O principal destino da razão theorica é portanto a *previsão* dos phenomenos, emquanto que a razão prática tem sempre em vista a *modificabilidade* dos sêres.

«Generalisando por abstracção, diz Augusto Comte, a theoria isola cada phenomeno de todos aquelles de que é realmente acompanhado, para reunil-o aos effeitos semelhantes que comportam todos os outros casos mesmo hypotheticos. Em sentido inverso, a prática especifica toda a acção segundo o conjuncto de circumstancias capazes de effectual-a; o que constitue um ponto de vista mais conforme ao do sentimento sempre directamente synthetico, tanto quanto espontaneamente relativo aos sêres».

A razão theorica é analytica, obedece por conseguinte á logica dos signaes, a razão concreta é essencialmente synthetica, donde a sua preferencia pela logica do sentimento. Com o auxilio da abstracção theorica podemos instituir leis geraes que

unicas permittem previsões capazes de dirigir a nossa acção, modificadora sobre os sêres. Mas é preciso reconhecer tambem que, sem a concreção prática, as nossas concepções não teriam a realidade sufficiente. E' ella que a cada passo traz o espirito theorico á realidade objectiva.

A verdadeira coherencia mental consiste por conseguinte na harmonia entre estes dois methodos, de tal fórma que a intelligencia se torne cada vez mais um espelho do mundo exterior.

Um exemplo muito simples patenteia bem os dois campos de acção differentes—o da modificação dos sêres e o da previsão dos phenomenos—em que se desenvolvem respectivamente a razão concreta e a razão abstracta.

Estudando a quéda dos corpos no ponto de vista concreto, no intuito de modificar os sêres ou as multiplas circumstancias que acompanham o phenomeno, não fazemos abstracção de nenhum dos elementos perturbadores.

Supponhamos, por exemplo, que se trate do caso concreto da quéda ou de quaesquer outros movimentos de salto do homem

num meio fluido, isto é, num meio liquido ou gazoso. A sabedoria prática não consiste em afastar; antes, pelo contrário, em reunir os multiplos phenomenos physicos e physiologicos que acompanham o acto da natação ou da gymnastica, introduzindo as modificações mais simples e importantes que facilitam o movimento sem grande perturbação do systema. Dahi o conjuncto de regras a que nos devemos submetter para realisar taes exercicios.

Quando se estuda o mesmo phenomeno no ponto de vista theorico, começa-se abstrahindo a natureza do corpo que cae, seja um homem ou uma pedra, um animal ou um páu; abstrahem-se os movimentos proprios do sêr, movimentos que teriam por fim distribuir a massa do corpo de modos diversos em tôrno do seu centro de gravidade, como fazem os animaes para cairem de pé. Abstrahem-se não só as modificações do meio fluido como o proprio meio, suppondo-se que cae no vazio. Nessas condições, entra-se apenas com a intensidade da gravidade, isto é, com a velocidade inicial que a gravidade imprimiria á unidade de massa, o tempo e a altura da

queda. Encarando assim a questão, encontram-se as equações, ou melhor, as relações que ligam todas as variaveis e constantes não abstrahidas:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 ; \qquad v = gt ;$$

das quaes se tira, pela eliminação de t:

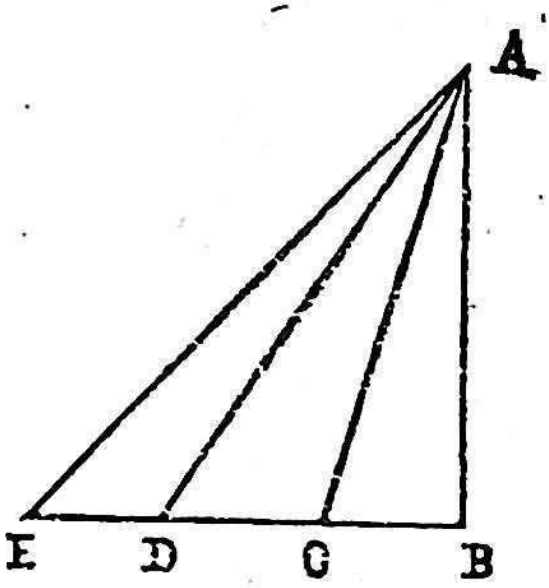
$$v = \sqrt{2gx}.$$

Se considerarmos agora o caso da quéda segundo um plano inclinado, teremos que transformar g em $\frac{h}{l}g$, sendo h a altura do plano e l o seu comprimento, o que dá

$$v = \sqrt{2\frac{gh}{l}x}, \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gh},$$

suppondo-se $x = 1$.

Esta ultima fórmula ensina que a velocidade da quéda dos corpos não depende do caminho percorrido, mas da altura da quéda, isto é, da altura em que se acha o movel relativamente ao ponto de partida.



E' assim que, se caírem ao mesmo tempo do ponto A quatro móveis, um livremente, e os outros tres segundo os planos A C, A D e A E, esses quatro móveis terão a mesma velocidade nos quatro pontos B, C, D, E, que se acham no mesmo plano horizontal.

Se da fórmula geral $x = \frac{1}{2} g\, t^2$ se tirar $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ e se substituir nesta ultima g por $\frac{hg}{l}$ e x por l, que é o espaço percorrido não verticalmente, teremos:

$$t = \sqrt{\frac{2l^2}{g\,h}}.$$

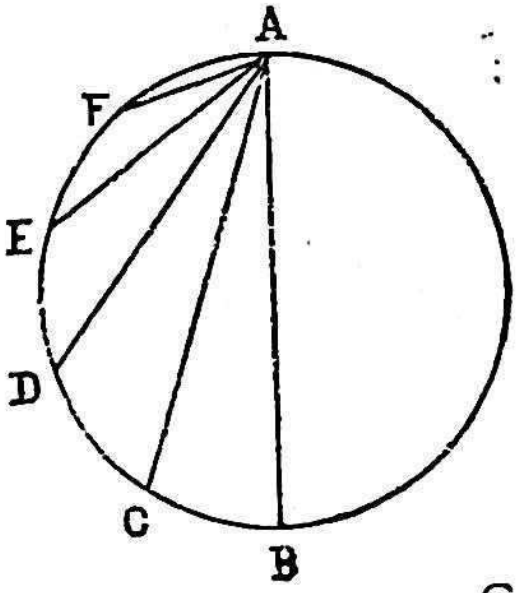
Comparando-se esta fórmula com a precedente para apreciar-se a relação que existe entre os espaços percorridos ao mesmo tempo vertical e obliquamente, teremos:

$$\frac{2l^2}{g\,h} = \frac{2x}{g},$$

donde

$$l^2 = h\,x.$$

Esta equação mostra que o espaço percorrido l é média proporcional entre a vertical x, correspondente a esse espaço, e a altura total da queda h.



Assim, se do ponto A partem ao mesmo tempo cinco móveis, um verticalmente e os outros quatro segundo os planos A C, A D, A E, A F, quando o primeiro tiver chegado a B, os outros estarão respectivamente em C, D, E, F, pontos todos situados numa circumferencia cujo diametro é o caminho AB percorrido verticalmente.

A razão concreta só póde verificar toscamente essas leis que a razão abstracta nos ensina. Ella não poderá jámais descobrir, por exemplo, a incommensurabilidade de duas linhas; a sua verificação mesmo seria grosseira e equivoca.

A razão abstracta é dogmatica, a razão concreta é empirica. O dominio da razão concreta é muito mais extenso que o da razão abstracta, de modo que constantemente o empirismo vem supprir o dogmatismo, tanto mais quanto o empirismo póde ser systematisado em diversos gráus.

As theorias da resolução numerica das equações, das curvas de erros, das sombras e perspectiva tratadas graphicamente pela geometria descriptiva e as soluções dos problemas da graphostatica são exemplos bem proprios para mostrar como a razão prática completa a razão theorica, isto é, como o empirismo suppre o dogmatismo e como, por sua vez, a razão theorica reage depois sobre a razão prática systematisando o proprio empirismo.

Limitada a resolução algebrica das equações aos quatro primeiros gráus, somos naturalmente levados a recorrer ao empirismo sempre que nos achamos em face de uma equação de gráu superior ou de uma equação transcendente não reductivel á fórma algebrica dentro desses quatro gráus. O empirismo consiste em experimentar numeros successivamente até encontrar os valo-

res exactos correspondentes ás raizes commensuraveis ou os valores sufficientemente aproximados correspondendo ás raizes incommensuraveis da equação.

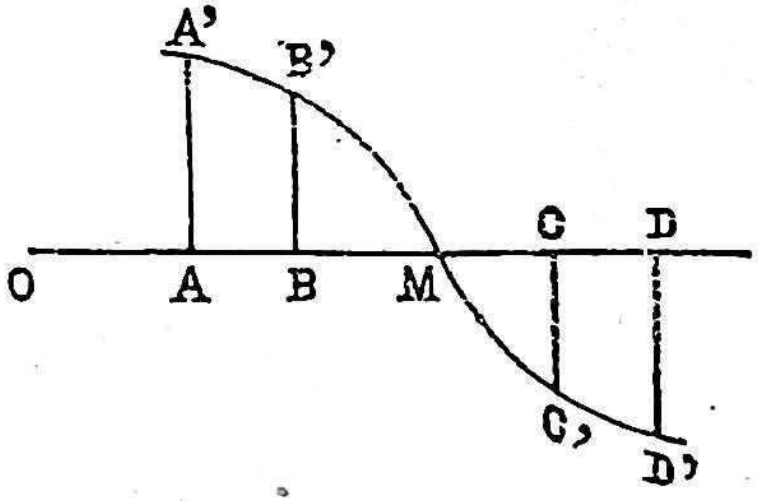
Mas essas tentativas seriam longas e demasiado peniveis, arriscando-nos mesmo a fazer muitos ensaios vãos, se a razão theorica não fosse invocada em auxilio do empirismo, systematisando o emprêgo dessas proprias tentativas pelos diversos processos de resolução numerica das equações que se têem proposto desde Viète até Fourier.

Esse emprêgo da razão concreta que acabamos de indicar na resolução das equações é o primeiro passo do empirismo na resolução dos problemas; é, por assim dizer, o primeiro gráu, porque elle vae mais longe.

Quando a complicação do problema é tal que se não póde ou não convém pôr em equação, experimentam-se soluções: umas não convêm por excesso, outras por falta, de modo que a verdadeira solução fica entre umas e outras.

Representando, segundo a geometria cartesiana, os numeros experimentados pelas

abscissas: OA, OB, OC, OD de um systema de eixos rectilineos e rectangulares, os resultados deverão ser indicados pelas ordenadas



A A', B B', C C', D D'. Temos assim uma serie de pontos A', B', C', D', uns acima do eixo das abscissas, outros abaixo, porque uns correspondem a soluções que não convêm, por excesso, e outros correspondem a soluções que não convêm por falta. Considere-se uma curva unindo todos esses pontos; comprehende-se que essa curva não póde passar dos pontos situados acíma do eixo das abscissas para os pontos situados abaixo desse eixo sem cortal-o, ou, segundo a linguagem mathematica, a

ordenada não póde passar dos valores positivos aos valores negativos sem passar por zero. A abscissa OM correspondente a esse valor zero da ordenada, isto é, ao ponto em que a curva corta o eixo das abscissas, é que dá a solução do problema.

O uso das curvas de erros e o seu traçado graphico constituem pois o segundo gráu do empirismo, porque nem sequer empregamos as equações resolvidas por tentativa. Mas, nesse proprio uso mais amplo e franco do empirismo, ainda invocamos a razão theorica para guiar a razão prática.

Procuramos calcular a equação de uma curva que passe por todos esses pontos. Temos um problema indeterminado, porque ha uma infinidade de curvas passando pelos mesmos pontos. Neste caso, como em outros identicos, a razão prática aproveita a indeterminação do problema para escolher a solução mais facil, isto é, para formar a hypothese mais simples. De todas as curvas que a razão theorica apresenta, ella escolhe as chamadas paraboli-cas, cuja equação geral é

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \text{etc.}$$

As constantes arbitrárias, a, b, c, d, etc. servem para sujeitar a curva á passagem pelos pontos dados, de tal modo que o numero de pontos por que passa uma curva, ou o numero das suas condições determinantes, é indicado pelo numero de constantes arbitrárias da equação correspondente. Se quizermos, por exemplo, a curva parabolica passando por dois pontos apenas, a equação ficará reduzida a duas constantes, tomando a fórma do primeiro gráu :

$$y = a + b\,x,$$

que representa uma linha recta.

A apreciação philosophica da theoria das curvas de erros é ainda eminentemente propria para revelar-nos uma bella applicação da principal lei da philosophia primeira. Com effeito, ha, como dissémos, uma infinidade de curvas que podem passar por todos os pontos dados ; mas, em vista dessa indeterminação do problema—*nós formamos a hypothese mais simples e sympathica que comporta o conjuncto dos conhecimentos a representar*—empregamos as

curvas parabolicas, que são as mais simples e portanto as mais faceis.

Sabe-se que a solução do problema das sombras consiste em formar uma superficie conica, tendo por geratriz uma linha recta passando pelo fóco luminoso e tangenciando o corpo opaco e interceptada além do corpo opaco por outra superficie sobre que se projecta a sombra. Essa superficie conica póde ser encarada como cylindrica em certa porção limitada, se o fóco se acha tão distante do corpo opaco que os raios luminosos na parte considerada possam ser tomados sem êrro sensivel como parallelos.

A solução do problema da perspectiva exige que se imaginem rectas passando pelo olho do observador e por todos os pontos da superficie do objecto que se quer pôr em perspectiva e se faça a intersecção dessa pyramide com um plano interposto ao objecto e ao olho do observador.

Todos estes problemas se resolvem de um modo uniforme, pela geometria geral, mas ficam por isso mesmo sujeitos ás vicissitudes do calculo. Como na prática não ha necessidade de grandes aproximações, e

até não se poderia formar uma equação a tres variaveis que exprima a fórma variada e caprichosa de qualquer corpo, submette-se o problema a uma resolução graphica, segundo o processo da geometria descriptiva e obtem-se a solução por uma serie de pontos tão aproximados quanto exigem as necessidades da arte. Eis o empirismo supprindo o dogmatismo, e ao mesmo tempo a razão theorica em que se baseia a geometria de Monge reagindo sobre o empirismo puro.

Todos os problemas de resistencia dos materiaes e estabilidade de construcções eram resolvidos pelo calculo, e obtinham-se soluções que, embora compativeis com o gráu de aproximação dos elementos que se tomam por medida, excediam á precisão de que se carecia na pratica. E como essas transformações de calculo correspondem a operações graphicas, os engenheiros têem creado de algum tempo a esta parte um systema de construcções geometricas que resolvem com a necessaria aproximação esses diversos problemas. A' coordenação desses processos geometricos, chamam elles—*Graphostatica*. Isto constitue

outro exemplo bem claro de systematisação do empirismo.

Nenhum estudo poderia caracterizar melhor a relatividade de quaesquer das nossas concepções e o gráu de exactidão das nossas previsões do que a theoria dos erros. Com effeito, sem essa theoria muito bem systematisada, sempre se suppõe que só existe êrro onde não ha certeza, de modo que a certeza e o êrro são duas coisas antagonicas e portanto inconciliaveis.

Mas, quando se tem em vista a imperfeição dos nossos sentidos, imperfeição minorada mas não completamente superada pelos instrumentos de que nos servimos nas nossas medidas e observações, comprehende-se facilmente que nem os nossos calculos, nem mesmo os nossos raciocinios theoricos e praticos fundados nessas medidas e observações podem ser rigorosamente certos; todos elles se acham inçados de erros inevitaveis.

A nossa sabedoria consiste, portanto, em reconhecer essa contingencia, e aproveital-a para evitar erros maiores, ou dispensar-nos muitas vezes de trabalhos inuteis. Assim, pois, sabendo-se que os elementos funda-

mentaes de um problema foram apanhados com certa precisão, seria superfluo dar ao calculo uma aproximação incompativel com a precisão dos seus elementos. Devemos de antemão procurar saber até que ponto o nosso calculo póde estar certo. Inversamente, querendo resolver um problema com dada precisão, devemos antecipadamente procurar saber com que aproximação devem ser medidos ou observados os seus elementos.

Como se vê, esta theoria apresenta-nos de uma maneira bem nitida a distincção eminentemente philosophica entre a *certeza* e a *precisão* geralmente confundidas por aquelles que não meditaram a mathematica sob o seu aspecto logico. Uma proposição sociologica, biologica ou chimica é tão certa como um theorema mathematico. A unica differença sob o aspecto logico é que as proposições mathematicas têem uma precisão que as proposições chimicas, biologicas e sociologicas não poderiam comportar. A theoria dos erros assignala muito bem essa differença e caracterisa mesmo os diversos gráus de precisão, visto que nos mostra, por exemplo, que os numeros 3; 3,1; 3,14;

3, 141; 3, 1416; etc., representam todos a relação incontestavelmente certa entre a circumferencia e o diametro, mas cuja precisão varía de um para outro. Ella dá-nos o exemplo mais frizante de que a aproximação nas nossas medidas deve ir apenas ao gráu reclamado pelas nossas necessidades. Assim, todos comprehendem, por exemplo, que não é necessario dar aos instrumentos de topographia o mesmo gráu de precisão que exigem os instrumentos de astronomia; que é superfluo nivelar os goniometros para um levantamento topographico com o mesmo cuidado com que se nivelaria uma luneta meridiana ou um theodolitho para a determinação de uma posição geographica.

Antes da invenção da trigonometria, era inutil aperfeiçoar os instrumentos de observação astronomica no intuito de dar mais apurada precisão, porque não havia meio de ligar essas aproximações; ao contrário, a invenção da trigonometria exigiu o melhoramento dos instrumentos de observação, porque era inutil ligar rigorosamente numeros, sabendo-se préviamente que elles estavam inçados de erros. Assim, a creação

da trigonometria grega ligou-se á invenção do astrolabio.

A theoria dos erros, lembrando-nos que não ha medida alguma absolutamente exacta, assignala a relatividade de quaesquer das nossas concepções, como proclamou Augusto Comte: *Tudo é relativo; eis o unico principio absoluto.*

Mas a precisão caracteristica do espirito mathematico tambem incute nessa idéa de relatividade uma certa gradação, concorrendo para dar-lhe muito maior importancía logica.

Quando dizemos que se commetteu êrro de 1 metro numa medida e noutra êrro de 1 millimetro, a primeira idéa que nos occorre é que a segunda medida foi mais exacta que a primeira, porque o primeiro êrro é incontestavelmente menor que o segundo. Mas se considerarmos qne o êrro de 1 metro provém, por exemplo, da medida de uma estrada de 100 kilometros e que a segunda resulta da medida da espessura de uma placa de 10 millimetros, comprehende-se então como a primeira

medida pôde ser mais precisa que a segunda (1).

Se dividirmos, segundo a theoria mathematica, o êrro de 1 metro pela extensão medida de 100 kilometros ou 100.000 metros, temos $\frac{1}{100.000}$, que se chama *êrro relativo*, isto é, o êrro commettido em cada unidade. Semelhantemente, teriamos, no segundo caso, 1 millimetro dividido por 10 millimetros, que dá $\frac{1}{10}$.

Expressos os erros por este meio, podemos então apreciar com verdadeira relatividade qual foi a operação mais justa.

Nenhuma ordem de phenomenos poderia patentear melhor a idéa de lei natural que os phenomenos mais geraes e mais simples—os mathematicos. A idéa de lei em mathematica corresponde á de equação e depende portanto da idéa de formação.

Diz-se que uma grandeza é formação de outra ou de outras, quando o valor dessa grandeza depende do valor dessa outra ou dessas outras. Assim, se o valor de y depende dos valores de x e de a, podemos

(1) Agliberto Xavier—Théorie des Approximations numériques et du Calcul abrégé.

escrever symbolicamente, segundo a notação usual nessa sciencia :

$$F(x, y, a) = o,$$

ou ainda, exprimindo *y* por meio de *x* e *a*,

$$y = f(x, a).$$

No primeiro caso, temos a expressão de uma formação implicita, no segundo temos a de uma explicita. Uma equação não resolvida está no primeiro caso; uma equação resolvida, ou uma fórmula, está no segundo.

Esta distincção das formações em implicitas e explicitas corresponde philosophicamente á importante classificação das leis em leis de *semelhança* e leis de *successão*. De semelhança são todas as leis que, no ponto de vista mathematico, affectam a fórma implicita; de successão são as que se apresentam sob a fórma explicita.

Um simples exemplo vem esclarecer admiravelmente o caso. Sabe-se que Thales de Mileto descobriu a lei fundamental dos triangulos : que a somma dos seus tres angulos é egual a dois angulos rectos. Te-

mos uma lei de semelhança que poderia ser assim expressa ;

$$A + B + C = 2r,$$

representando respectivamente por A,B,C, os angulos e por r o angulo recto. Se agora, por um raciocinio deductivo, resolvessemos essa equação em relação a A, por exemplo,

$$A = 2r - (B + C),$$

teriamos uma nova lei, correspondente a uma formação explicita, uma lei de successão, assim chamada, porque indica o modo de successão dos valores da variavel dependente A com relação á suas variaveis independenntes B, C.

Todas as leis naturaes seriam susceptiveis de expressões analogas, se tivessem sempre o necessario gráu de simplicidade e precisão para serem traduzidas em linguagem algebrica. A' medida que os phenomenos se complicam, as leis escapam a essa expressão, quer pela sua indeterminação, quer pela sua complicação. Como ex-

primir por formulas identicas certas leis como as que regem os phenomenos sociaes e moraes? Como exprimir algebricamente esta lei :

—Cada entendimento passa successivamente por tres estados: ficticio, abstracto e positivo, com uma velocidade proporcionada á generalidade dos phenomenos correspondentes.

A relatividade de certas leis manifesta-se pelo gráu de indeterminação que as caracterisa; a relatividade de outras perfeitamente determinadas e susceptiveis de uma expresão mathematica, como a lei de Mariotte sobre a compressão dos gazes, revela-se pela aproximação com que traduzem a relação entre os phenomenos considerados. A lei da gravitação universal, tão simples e determinada, é egualmente uma relação aproximada, tanto quanto exigem as nossas necessidades theoricas e praticas da actualidade.

Entretanto, o que acabamos de dizer não auctorisa ninguem a suppôr, como Lobctschewski creu ter provado, que a leí de Thales é uma aproximação, isto é, que a somma dos angulos de um triangulo é

pouco menor que dois angulos rectos. Não, a verdadeira logica prova que tal somma é absolutamente egual a dois angulos rectos. Mas essa mesma logica mostra que, para se terem taes relações absolutas, foi mistér crearem-se typos abstractos, como são os typos geometricos. O mundo exterior apresenta-nos seres que só aproximadamente poderiam ser comparados a esses verdadeiros modelos.

Ouvimos dizer muitas vezes que, em virtude da extrema complicação dos seus phenomenos, a Moral positiva ainda não tem leis naturaes conhecidas. Quem assim pensa raciocina mui superficialmente, porque não observa que os phenomenos mais complicados são justamente os que estão sujeitos a maior numero de leis, porque maior é o numero de peias que ligam o grande numero de variaveis e constantes da questão. Tomemos qualquer collecção de maximas ou pensamentos moraes, e veremos que cada reflexão real constitue uma lei de semelhança ou successão, muito vaga, muito indeterminada, mas uma lei perfeitamente positiva.

Refutação do Materialismo mathematico

Quem estudou a historia das sciencias não ignora os esforços empregados para libertal-as, uma a uma, do jugo theologico e metaphysico. A theologia e a metaphysica afastavam do espirito positivo a pesquisa das leis, procurando attribuir os phenomenos naturaes á vontade dos deuses, ou procurando inquirir a causa primária dos phenomenos e explical-a por meio de forças sobrenaturaes, occultas, virtudes dos corpos, etc. Foi mistér que a essa tendencia contumaz, que se chamou *espiritualismo*, se oppozesse outra contrária conhecida sob a denominação de *materialismo*. No seu Tratado da Luz, diz Huygens: «*Omnium effectuum naturalium causæ concipiuntur per rationes mechanicas, nisi velimus omnem spem objicere aliquid in physicis intelligendi*». E' essa a manifestação systematica do mate-

rialismo do seu tempo, consistindo em referir todos os phenomenos ao movimento e á fórma.

Philosophicamente encarado, o materialismo deve ser definido por essa tendencia de reduzir os phenomenos superiores a phenomenos inferiores em nome da influencia deductiva. Transformar effeitos de combinações chimicas dos corpos em phenomenos de peso, de calor, ou a actos meramente mecanicos, isto é, reduzir a chimica á physica ou á mecanica, é fazer materialismo physico ou mecanico; encarar os phenomenos biologicos de nutrição, reproducção, sensibilidade, movimento, etc., como simples effeitos de combinação, estendendo assim o dominio da chimica á biologia, é o que se chama materialismo chimico.

Se o materialismo foi necessario ao passado para que se podessem procurar as leis naturaes da physica, da chimica, etc., fóra da acção das entidades theologicas e metaphysicas, esse methodo não póde perdurar desde que a sciencia moderna reconheceu a irreductibilidade desses phenomenos, dada a nossa organisação sensorial e cerebral.

Nenhuma sciencia se presta melhor nem mais opportunamente na educação theorica á refutação do materialismo do que a mathematica, onde elle representou o papel mais importante e perigoso.

Mas, antes de proceder a esse trabalho philosophico, é util distinguir já as duas fórmas sob as quaes o materialismo póde apresentar-se: *concreta* e *abstracta*. O materialismo concreto visa sempre reduzir a um só elemento ou a um só phenomeno todos outros elementos ou phenomenos; o materialismo abstracto pretende submetter todos os phenomenos a uma só lei.

O mais antigo de todos os materialismos concretos foi incontestavelmente o de Thales de Mileto. Ao passo que os theologos nos dizem que Deus tirou o mundo do nada, Thales já affirmava que todos os seres donde provém tudo o que se produz são formados da *agua*, que é então o primeiro principio. Para Thales, nada nasce nem perece verdadeiramente, visto que essa natureza primeira subsiste sempre.

Posteriormente a Thales, vieram outros philosophos abundando sempre no mesmo materialismo, posto que mudassem o prin-

cipio primario. Assim, Anaximandro de Mileto substituiu a agua pelo *infinito*, isto é, uma especie de intermediario do ar e da agua. Anaximenes de Mileto preferiu o *ar*, Heraclito de Epheso escolheu o *fogo*. Finalmente Empedocles tornou-se o precursor de Aristoteles suppondo distinctos os quatro elementos que Heraclito suppunha derivados do fogo.

Muitos outros philosophos se succederam sustentando de outro modo o materialismo concreto. Desses, lembraremos apenas Anaxagoras de Clazomenes, que explicava o mundo por meio de combinações de *corpusculos*, Leucippo, que desenvolveu as idéas de Anaxagoras e concebeu os mundos como formados por um turbilhão constituido de corpusculos destacados do infinito, e finalmente Democrito de Abdera, discipulo do precedente, que propagou e desenvolveu as idéas do mestre, sustentando que os *atomos* e o *vazio* formam o principio universal.

A primeira manifestação do materialismo abstracto foi a da escola *italica* e no dominio da *arithmetica*, porque era essa a unica parte da sciencia então elaborada. Foi Py-

thagoras de Samos o primeiro representante do materialismo abstracto. Reconhecendo a universalidade das concepções numericas, esse profundo pensador admittiu os *numeros* como o principio das coisas.

Pythagoras havia presentido a existencia de leis numericas presidindo á nossa intelligencia, embora não as podesse formular. Vendo o mundo atravéz da intelligencia, elle devia sentir por toda parte a sua influencia. O exame dessas leis, porém, foi reservado a Augusto Comte, que o realisou na sua theoria subjectiva dos numeros.

Toda essa doutrina repousa nas propriedades philosophicas dos tres primeiros numeros, unicos communs aos animaes e ao homem e unicos susceptiveis, mesmo no homem, de ser abstractamente concebidos sem nenhuma linguagem, sem nenhum artificio especial. *Um* representa toda *systematização*, porque toda construcção em que não prevalece a unidade de principio é viciosa. *Dois* distingue sempre a *combinação*, pois que a nossa intelligencia é de tal modo formada que não comporta combinação mais que binaria. *Tres* caracterisa sempre a *progressão*, que, não sendo ternaria, se torna illusoria.

O exame dos attributos inherentes aos outros numeros deve sempre repousar nas propriedades que acabamos de assignalar, caracteristicas dos tres primeiros, que, não comportando decomposição alguma, são denominados *primos*, isto é, primeiros, e por isso considerados como raizes universaes. Assim, todo o estudo das aptidões philosophicas dos demais deve consistir essencialmente em decompôl-os nessas tres raizes.

Estudando as propriedades resultantes do seu agrupamento, reconhece-se que nenhum numero goza de propriedades subjectivas de mais alta relevancia nos nossos trabalhos intellectuaes que o numero *sete*, porque se deriva, independentemente do uso dos signaes, quer de tres conjugados precedidos ou seguidos de uma synthese, quer de uma progressão de conjugados. Assim, o numero sete representa o mais vasto agrupamento que se póde conceber sem nenhuma linguagem especial, mas por um artificio espontaneo.

Estas propriedades, embora desconhecidas, nem por isso deixaram de dominar a intelligencia humana, como as leis de Har-

vey não deixaram de regular a circulação do sangue no homem antes da sua descoberta.

«Tal é, a meus olhos, diz Augusto Comte, a verdadeira origem da instituição universal da semana. Essa origem essencialmente subjectiva póde unicamente explicar como precedeu por toda parte á astronomia, á que em vão se liga a sua formação objectiva. Ouso assegurar que observadores racionaes o encontrarão em populações que ainda não tenham notado o numero dos planetas.»

Não se poderia tampouco dar outra explicação ao phenomeno curiosissimo que se observa na musica, tão bem assignalado pelos Srs. Ernest David e Mathias Lussy na sua—*Histoire de la Notation musicale*:

«Faremos notar, dizem elles, que uma coincidencia verdadeiramente singular produziu o que se poderia chamar *heptarchia* da notação. Assim, encontramos 7 notas, 7 sustenidos, 7 bemoes, 7 bequadros, 7 figuras de notas, 7 figuras de silencio, 7 claves, 7 medidas, 7 processos de execução, 7 generos de diversão, 7 oitavas formando o diapasão usado. Só a titulo de curiosi-

dade deveriamos mencionar esse phenomeno».

Além deste presentimento das leis numericas da intelligencia, Pythagoras devia ter entrevisto que, nos casos complicados, em que o conhecimento das coisas não é bastante preciso para que as quantidades sejam meticulosamente definidas, essas quantidades podem ser entretanto empiricamente determinadas pela razão concreta. Assim, temos uma serie de regras práticas expressas em numeros para guiar a nossa conducta.

Um exemplo bem claro disso tinha o philosopho grego na theoria fetichica dos *dias criticos*, tal como se acha exposta nos livros de Hippocrates.

Quando o desenvolvimento da algebra aperfeiçoou a logica deductiva, fez surgir grandes esperanças na extensão do seu dominio, em vista da identidade entre a noção de equação e a noção de lei.

Longe de corrigirem o materialismo, os philosophos, mesmo metaphysicos, secundaram-no constituindo o methodo isoladamente da doutrina e consagrando o abuso da deducção. Sómente quando o seu des-

envolvimento ameaçou os dominios mais elevados da sciencia foi que Kant, em meados do seculo XVIII, tentou conter essa terrivel aberração, separando o dominio da quantidade do da qualidade.

Essa distincção, porém, nenhuma efficacia teve, nem poderia ter, no progresso do materialismo algebrico, conforme ensinou Augusto Comte na sua Synthese Subjectiva:

«Normalmente apreciadas, todas as especulações reaes podem ser directamente concebidas como sempre reductiveis a noções de quantidade, sègundo a terceira lei da philosophia primeira. A esse julgamento geral, o surto especial do espirito scientifico vem espontaneamente trazer uma confirmação decisiva, manifestando tendencia contínua para essa reducção, que jámais deixou de se desenvolver desde o começo dos estudos abstractos. Basta citar a transformação gerai das pesquisas geometricas em questões numericas, irrevogavelmente realisada na instituição cartesiana da philosophia mathematica. Em vão os metaphysicos pretenderiam limitar essa meta-

morphose ás idéas de fórma e situação que parecem irreductiveis aos numeros, tanto como todas as outras. Estendidas ás questões de movimento e equilibrio, a transformação algebrica superou espontaneamente essa restricção arbitrária e frivola, em que se desconhecia que a immutabilidade da ordem universal limita as suas modificações a não poder affectar senão o gráu, mesmo idealmente».

Para bem apanhar a marcha do materialismo mathematico, é preciso reconhecer que a pretensão da algebra á presidencia encyclopedica começou quando ella se destacou das suas duas fontes, da arithmetica e da geomertia, mórmente quando substituiu as proporções pelas equações, e só terminou quando a renovação cartesiana a religou á geometria. Renunciando então ás suas pretensões, ella fez surgir um novo materialismo, o *geometrico*, tendo Descartes por seu representante.

A refutação do materialismo algebrico só póde ser feito convenientemente por um exame dos recursos proprios da algebra e da sua extensão.

Quem possue alguns conhecimentos

dessa parte do calculo, mesmo muito rudimentares, sabe que a principal difficuldade da resolução de um problema está em pôl-o em equação, isto é, em exprimir em linguagem algebrica aquillo que é expresso em linguagem vulgar.

Ora, a linguagem algebrica reduz-se essencialmente ao emprego das dez formações seguintes, que podemos grupar em conjugados, visto que a cada formação directa corresponde uma inversa. Representando por x a variavel independente, por y a variavel dependente e por a uma constante arbitrária, temos

Formações algebricas

1º Par..
$$y = a + x$$
$$y = a - x$$

2º Par..
$$y = ax$$
$$y = \frac{a}{x}$$

3º Par..
$$y = x^a$$
$$y = \sqrt[a]{x}$$

Formações transcendentes

4º Par.. $y = a^x$; $y = \log_a x$

5º Par.. $y = \text{sen } x$; $y = \text{arc (sen} = x)$

Se a traducção de um pensamento expresso numa lingua opulenta de fórmas e vocabulario para uma lingua pobre de expressões é muitas vezes difficillima, comprehendem-se então os embaraços que se encontram em exprimir as leis naturaes, as relações multiplas e variadas dos phenomenos com tão reduzidos recursos.

Mas, supponhamos agora vencida essa difficuldade, supponhamos que houvesse meio de enriquecer essa linguagem tão pobre a ponto de tornal-a apta a exprimir todo o nosso raciocinio. Que complicação teriam essas equações !

Reduzida a essa mesquinha linguagem constituida de dez formações simples, a algebra apresenta-nos equações que só podem ser resolvidas em numero insignificante de casos. As unicas equações que

se resolvem directamente são as algebricas racionaes. As equações transcendentes só se resolvem quando se podem transformar em algebricas equivalentes, e essa transformação só se effectua em numero reduzidissimo de casos. As equações algebricas irracionaes tambem só se resolvem quando é possivel transformarem-se em racionaes, e isso só se consegue rarissimas vezes. Das equações algebricas racionaes, a algebra só resolve as dos quatro primeiros gráus, salvo certos typos excepcionaes como as binomias, as trinomias, as reciprocas reductiveis finalmente aos quatro primeiros gráus.

Comparando agora essa importancia insignificante da algebra tomada separadamente com os fecundos resultados da sua subordinação á geometria, segundo a concepção cartesiana, comprehendem-se não só os vicios que lhes são inherentes como a irracionalidade da sua cultura isolada. A inconveniencia da cultura da algebra isoladamente revela bem o absurdo do estudo do methodo independentemente da doutrina, segundo os habitos metaphysicos.

Depois da publicação do seu—*Discurso sobre o Methodo*—em 1637, começa Descartes as applicações e faz então imprimir a sua *Geometria* em que dá a maior generalidade aos phenomenos geometricos por uma feliz combinação da logica das imagens com a logica dos signaes. Logo após, publica os seus tratados sobre a *Dioptrica* e os *Meteoros* em que procura demonstrar que tudo o que existe no mundo se reduz a fórma e movimento. E como o movimento considerado independentemente da acção da massa, então desconhecida, se reduz a simples movimento geometrico, ficou assim creado o *materialismo geometrico.*

Na sua *Dioptrica*, Descartes cria a sua physica mathematica; mais tarde Guglielmini cria tambem a chimica mathematica e Boerhaave funda a physiologia mecanica (reductivel á geometria). Entregando os attributos moraes e intellectuaes do homem aos puros metaphysicos, Descartes assimilou a vida organica do homem á vida organica do animal e instituiu a concepção do *automatismo,* reduzindo o animal a uma machina, portanto sem attributos moraes nem intellectuaes.

Esta synthese objectiva prevaleceu até que, creando a theoria da gravitação universal, Newton introduziu na sciencia uma noção nova, a noção de *massa*, de modo que a mecanica assim concebida em toda a sua integridade não podia mais ser englobada na geometria. Abstracção feita da massa, a mecanica reduz-se a elementos percebidos simplesmente pelo sentido da vista, formando aquillo que Lazaro Carnot chamou *movimentos geometricos* e que os geometras de hoje denominam *cinematica*, reductivel portanto á geometria.

A noção de massa exige um sentido especial para perceber a sensação correspondente—o sentido da musculação. Ficou assim destruida a synthese cartesiana e um novo materialismo surgiu—o materialismo puramente *mecanico*.

Esse materialismo tornou-se mais nocivo, posto que menos especioso que o algebrico. Com effeito, a supremacia algebrica repousa na universalidade subjectiva peculiar ao calculo das relações em consequencia da identidade da idéa de equação e de lei, mas essas aspirações dissipam-se desde que se reconhecem as difficuldades invenciveis quer da formação, quer da resolução

das equações. Quanto á mecanica, pelo contrario, a sua supremacia, longe de se manifestar subjectiva, revela-se objectiva, visto que não se póde recusar a participação das leis geraes do equilibrio e do movimento na producção de todos os phenomenos.

Não obstante toda a influencia e desenvolvimento que teve o materialismo mecanico de Newton, já Diderot reconhecia a seu modo a irreductibilidade dos phenomenos e exprimia na sua—*Interprétation de la Nature*—a esperança de um governo intellectual, se bem que em outra obra, no—*Rêve de d'Alembert*—houvesse annuido a uma synthese concreta dos phenomenos organicos.

Reconhecendo os vicios, quer do espiritualismo, quer do materialismo, mas dando justa satisfação ás suas aspirações, devemos subordinar cada sciencia objectivamente á precedente e subjectivamente á seguinte, tendo em vista que todo o materialismo abstracto resultou da contingencia de cada sciencia se desenvolver sob o impulso da precedente. Assim, toda sciencia superior repousa sobre a inferior, mas compete á superior determinar o seu destino e regular o seu desenvolvimento.

Dos ensinamentos logicos que resultam do Calculo e da Geometria

Dissémos que a importancia logica da mathematica consiste em esboçar o emprêgo de todos os meios intellectuaes de que se serve a razão theorica nas outras sciencias. Iniciando o estudo do calculo numerico, temos o uso mais facil e mais perfeito, quer das nomenclaturas, quer das notações.

A numeração systematica instituiu logo uma nomenclatura tão perfeita que nenhum progresso posterior suscitou outro aperfeiçoamento a não ser a adopção de uma nova taxa de grupamento supplementar fundado na base já adoptada. E' assim que, durante muitos seculos, os grupamentos se faziam apenas de dez em dez, conforme a base decimal, usada por quasi todos os povos. Mais tarde, porém, querendo-se

dilatar a nomenclatura com economia de palavras, adoptou-se uma taxa accessoria —*mil*—subordinada á base fundamental, como se faz habitualmente empregando uma unidade maior ou menor que a unidade usual para evitar numeros expressos por muitos algarismos representando a unidade demasiadamente repetida ou significando a divisão da unidade em partes extremamente pequenas. De facto, em logar do metro, usa-se frequentemente do kilometro, e em outras occasiões, pelo contrario, emprega-se o millimetro.

Adoptando-se a taxa de grupamento mil, ficou *ipso facto* estabelecido que mil unidades formariam um grupamento superior, a que se chamou classe. As classes foram denominadas pela palavra que exprimia a sua ordem ajuntando um suffixo, taes são: milhão, bilhão, trilhão, etc.

Se cada classe é composta de mil unidades da classe immediatamente inferior, toda ella é formada de tres ordens, a saber: unidades, dezenas e centenas. Foi para dar á classe uma composição ternaria que se adoptou a taxa de grupamento supplementar—mil. Com effeito, para preencher

o seu destino, essa classe devia ser a maior possivel comtanto que não houvesse confusão nem embaraço na distincção das ordens que a compõem. Ora, nós dissémos que o numero tres é o maior numero que, mesmo no homem, póde ser abstractamente concebido sem nenhuma linguagem nem sequer artificio especial. Uma classe de quatro ordens já exigiria artificio ou esforço para a discriminação. Tal foi o motivo da adopção da taxa supplementar de grupamento—mil—, de que resulta a composição ternaria das classes numericas e por consequencia a regra que manda dividir o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, a fim de poder ser lido. Eis, a nosso ver, a razão subjectiva que unica poderia convir a essa preciosa regra. Toda explicação objectiva seria radicalmente illusoria, porque esse preceito resulta de uma simples convenção, mas tão em harmonia com as nossas contingencias mentaes que se nos afigura uma verdadeira lei natural resultante das propriedades objectivas dos numeros.

A nomenclatura dos numeros consistindo em enunciar as classes a partir das mais

elevadas para as inferiores, indicando em cada uma as ordens que a compõem segundo a mesma hierarchia, constitue um verdadeiro modelo de nomenclatura e o mais perfeito esboço de classificação.

A notação numerica instituida pelos indús, transportada pelos arabes para o Occidente na edade média e vulgarisada a partir do seculo XIV, notação de que nos servimos ainda hoje, apresenta um gráu de perfeição tal que, durante cinco seculos de cultura scientifica e philosophica, ainda não suscitou nenhum melhoramento. Ao contrário, querendo utilisar todas as simplificações que as fracções decimaes comportam, o inventor da theoria dos logarithmos instituiu para ellas uma luminosa notação fundada no systema indú ou de posição. Essa notação applica-se portanto egualmente ás fracções cuja taxa de fragmentação coincide com a base da numeração, ás fracções setimaes na base sete, por exemplo. Póde-se facilmente estender ainda essa notação a todas as fracções cuja taxa de divisão é constante, embora não coincida com a base da numeração, como são as fracções sexagesimaes, tão usadas pelos antigos.

Por mais eminente que seja o systema de nomenclatura chimica concebido por Lavoisier, elle não poderá jámais attingir a perfeição da nomenclatura numerica, dada a multiplicidade e complicação dos seres a enunciar, mórmente em se tratando dos compostos chamados organicos.

As noções de analyse e synthese, que a chimica nos dá de modo tão claro, visto que as realisa concretamente, já são iniciadas desde as primeiras concepções numericas. Decompondo um numero nos seus factores primos, temos a noção da *analyse elementar;* decompondo-o em factores não primos, isto é, em factores susceptiveis de ser por sua vez decompostos em outros, temos a idéa da *analyse immediata.* Finalmente, formando o maior divisor commum ou o menor multiplo commum de dois ou mais numeros pelo producto dos seus factores primos, realisamos uma verdadeira synthese numerica. Aliás cada conjugado de operações numericas representa uma synthese e uma analyse. Outros exemplos se nos deparam de bellissimas syntheses em mathematica. As memorias de Lagrange sobre essa sciencia são sem-

pre caracterisadas pelo seu espirito eminentemente synthetico. Reunindo toda a mecanica geral numa só fórmula, Lagrange operou uma synthese admiravel, não obstante o vicio logico de dissimular a triplicidade da sua base physica.

A theoria da abstracção leva-nos facilmente ás idéas de *typo abstracto* e *limite*, idéas que só podem ser bem esclarecidas na mathematica.

Apanhando por inducção o que ha de commum em todos os seres semelhantes, a nossa intelligencia cria um typo abstracto, como é o typo mangueira, o typo cajueiro, ou o typo cacáueiro. Por outro trabalho de inducção ainda mais abstracto, reunimos todos esses typos num só a que denominamos—arvore. Por um trabalho analogo chegamos ao typo—animal. Comparando esses dois typos entre si e reunindo o que elles apresentam de commum, creamos um typo ainda mais abstracto—vivente. Essas abstracções, cada vez mais apuradas, vão fazendo perder aos typos a nitidez da sua imagem. Eis como as imagens se vão confundindo com os signaes, como a inducção confina com a deducção.

E' na geometria e na mecanica que se faz o uso mais systematico dos typos. Dada a variedade de movimentos, a mecanica geral procura referil-os todos a certos typos fundamentaes que só a abstracção póde crear, taes são, por exemplo, o movimento uniforme em que o corpo percorre espaços eguaes em tempos eguaes, o movimento uniformemente accelerado, em que a velocidade cresce proporcionalmente ao tempo, o movimento uniformemente retardado, em que, pelo contrario, a velocidade decresce em proporção do tempo. Todos esses movimentos, por mais naturaes que nos pareçam, não se encontram rigorosamente realisados na natureza. Um corpo que cae deveria ter movimento uniformemente accelerado, um corpo projectado verticalmente, de baixo para cima, deveria ter movimento uniformemente retardado; mas, num e noutro caso, esse movimento é modificado pela resistencia do ar e outras perturbações. Todo o criterio da razão concreta consiste em assimilar os diversos movimentos effectivos aos typos creados pela razão abstracta.

Egualmente, dada a variedade de linhas

e superficies com que os corpos se nos apresentam e de linhas que descrevem nos movimentos, a geometria procura referir todas essas fórmas variadas a typos abstractos meticulosamente estudados; taes são a linha recta, a superficie plana, o circulo, a esphera, a espiral, a helice, o cylindro, o cóne, etc.

A cultura systematica desses typos abstractos exige uma das instituições mais antigas do espirito humano—o *espaço*—isto é, o meio abstracto em que devemos conceber essas fórmas e esses movimentos. Antes que o polytheismo houvesse creado os seus deuses, já a razão theorica, elevando-se da concepção do numero á da extensão, tinha instituido o espaço em pleno fetichismo, para desenvolver a contemplação abstracta no que concerne a fórma e a extensão. Precedendo portanto á creação dos deuses, a instituição do espaço deve sobreviver á sua extincção, adquirindo um destino verdadeiramente scientifico, philosophico e esthetico.

Com effeito, esse meio não se torna apenas a séde das nossas concepções geometricas e mecanicas; a elle devemos refe-

rir todas as nossas concepções scientific·s, philosophicas e estheticas. Quando um artista concebe uma obra de arte, deve contemplal-a nesse meio tão nitidamente quanto comporta a sua capacidade imaginativa.

Como se vê, a figuração dessas imagens no espaço, suscitada pelo estudo da geometria, mórmente pela geometria descriptiva, concorre poderosamente para desenvolver os nossos orgãos cerebraes da contemplação concreta e abstracta; que por sua vez põem em jogo os ganglios cerebraes: tuberculos quadrigemeos, corpo estriado, camas opticas, corpo olivario, em virtude da faculdade que elles têem de reproduzir as impressões sensitivas. Pertencendo todos esses orgãos á vida animal, estão sujeitos ás leis do habito e do aperfeiçoamento, o que dá um excellente meio de cultura das funcções elementares da nossa intelligencia.

A idéa de typo, dissemos nós, confina com a idéa de limite. Se não fossem a geometria e o calculo não poderiamos ter uma noção clara e precisa de limite.

Para adquirir essa idéa com a maxima clareza, recorramos á logica das imagens. Concebamos um polygono regular

inscripto num circulo, dupliquemos indefinidamente o numero dos seus lados, mas de fórma que os polygonos successivos se achem sempre inscriptos no mesmo circulo. Que vemos nós? O perimetro do circulo aproximar-se cada vez mais da circumferencia, sem jámais se confundir com ella. A circumferencia é então *o limite* para que tende o perimetro de um polygono regular inscripto num circulo, quando se duplica indefinidamente o numero dos seus lados. Assim, pois, o caracteristico do limite é não ser jámais attingido.

Para termos agora essa mesma idéa com a maior precisão, empregamos a logica dos signaes. Ajuntemos successiva e indefinidamente a ambos os termos de uma fracção, da fracção $\frac{3}{7}$, por exemplo, o mesmo numero, o numero 2:

$$\frac{3+2}{7+2} = \frac{5}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\frac{5+2}{9+2} = \frac{7}{11} = \frac{11}{11} - \frac{4}{11} = 1 - \frac{4}{11}$$

$$\frac{7+2}{11+2} = \frac{9}{13} = \frac{13}{13} - \frac{4}{13} = 1 - \frac{4}{13}$$

....

Vemos que os resultados são sempre eguaes á unidade menos uma fracção que diminue incessantemente tendendo para zero, porque o seu numerador é constante, egual a 4, e o denominador cresce successiva e indefinidamente duas unidades. Ajuntando-se então constantemente o mesmo numero a ambos os termos de uma uma fracção, essa fracção cresce tambem constantemente, mas não indefinidamente; ella tem por limite a unidade. Isso revela-nos por outro lado, e contra o sentimento geral, que uma grandeza crescendo constantemente póde não augmentar indefinidamente, pois no caso que figurámos, esse crescimento jámais attinge a unidade.

Convém pôr essa propriedade em confronto com aquella que, pela primeira vez, nos dá a noção fundamental de *invariabilidade* e com que um espirito desprevenido poderia confundil-a: uma fracção fica invariavel quando ambos os seus termos crescem simultaneamente na mesma proporção.

Essa noção de typo adquire importancia extraordinaria nas sciencias superiores e por tal fórma que, não a possuindo bem nitida, tal como decorre da mathematica, commettemos erros graves nas sciencias.

Todos sabem que ha dois estados mui bem definidos em que os corpos se nos apresentam—*solido* e *gazoso*. Entre elles ha uma serie de estados intermediarios, ora mais proximos do solido, ora tendendo mais para o gazoso. Toma-se então a média e fórma-se o typo-*liquido*. Mas, entre o estado solido e o liquido, ha uma serie de estados intermediarios, que se qualificam em geral de pastosos, assim como entre o liquido e o gazoso ha uma successão de termos, que se poderiam denominar genericamente semi-gazosos. Do mesmo modo que se concebem diversos gráus de solidez, tambem se devem imaginar diversos gráus de gazeificação. Crear portanto um quarto estado da materia, é desconhecer completamente a logica positiva.

Nas suas combinações, as substancias apresentam egualmente dois typos bem caracteristicos, o da simples *mistura*, como se encontram, por exemplo, o oxygenio e o azoto formando o ar atmospherico, e o da *combinação* propriamente dita, como o oxygenio e o hydrogenio constituindo a agua. Entre esses dois typos, concebemos um typo médio, o da *dissolução*. Tornar-se-ia

portanto irracional forçar certas combinações a entrar no typo mistura, no typo dissolução ou no typo combinação propriamente dita, como acontece com certas ligas que tanto têem de um como do outro typo, dentro dos quaes se acham.

Em biologia essa noção não é menos importante. Um *tecido* nada mais é que um typo abstracto, porque objectivamente não ha de facto tecidos, ha parenchymas. Tecido muscular, tecido cellular, etc. são abstracções anatomicas; o que existe effectivamente é o parenchyma muscular, o parenchyma cellular, etc. A concepção de *molestia* é egualmente um typo abstracto creado pela imaginação do pathologista para exprimir um conjuncto de symptomas constantes em certos desequilibrios vitaes. O que existe objectivamente são organismos perturbados nas suas funcções vitaes. Já a razão concreta havia inspirado a Pidoux este conceito—que não ha molestias para bem dizer, ha doentes.

No dominio da moral e das bellas artes é que a idéa de typo assume a mais alta relevancia. Temos typos geraes e muito abstractos—*virtude* e *vicio*,—temos outros

menos abstractos para caracterisar as diversas especies de virtude e vicio. Para instituir-se um systema moral, torna-se necessaria a creação de um typo que sirva ao mesmo tempo de limite do nosso aperfeiçoamento moral, intellectual e mesmo physico, sempre superior ao nosso alcance, sem o quê, não seria limite, mas perfeitamente em concento com o nosso sêr; é o que se póde chamar uma *utopia*.

As bellas artes, tendo por fim cultivar o nosso instincto da perfeição, devem por conseguinte consistir numa representação ideal, isto é, utopica, da realidade. Ellas devem hoje respeitar rigorosamente a realidade, exagerando o bom e o bello, tanto quanto permitte a propria realidade, de modo a despertar-nos disposições de aperfeiçoamento. Aquelles que pensam de modo contrário, nem por isso deixam de fazer a arte ideal, porque, em vez de exagerarem o bom e o bello, exageram o máu e o feio, em vez de concitarem o aperfeiçoamento, provocam a corrupção.

A noção de limite lembra naturalmente a idéa de *maximo* e *minimo*. De facto, se tomarmos um termo por limite de uma

grandeza que varía e esse termo fôr attingido, elle deixa de ser limite e é então o estado maximo ou minimo dessa grandeza, se na sua variação ella o não ultrapassar. Tomemos um exemplo concreto; supponhamos um corpo projectado verticalmente de baixo para cima; elle sóbe até certa altura, ha uma verdadeira parada, e logo depois começa a descer. A esse ponto estacionario entre a subida e a descida é que se chama o maximo da sua ascenção.

A apreciação do estado minimo é a mesma, feita em sentido inverso. Imaginemos que se projecta com violencia na agua verticalmente, de cima para baixo, um corpo que fluctue nesse fluido. Elle penetra até certa profundidade, pára e logo após começa a regressar até á superficie, onde fica fluctuando. O ponto em que elle se detém, antes de começar a subir, é o que se chama o minimo da descida.

Disso resulta que, quando uma grandeza cresce constantemente, não tem maximo, e, inversamente, quando decresce sempre, não tem minimo. De sorte que, para haver esses estados, é mister que haja alternativa no crescer e decrescer. Uma

grandeza póde augmentar até certo ponto, dahi em deante diminuir até outro ponto, augmentar de novo e assim successivamente. Nesse caso, a grandeza tem diversos maximos e minimos. Assim, por exemplo, a temperatura de certo logar, apreciada no lapso de alguns annos, apresenta cada anno um maximo e um minimo de calor.

Estudando as proporções, conseguimos precisar uma noção adquirida espontaneamente. Sabe-se que numa ordem de architectura existem relações precisas entre as suas diversas partes, de modo que, dada uma columna, por exemplo, seja qual fôr o seu tamanho, a grandeza de uma parte deve estar para a de outra em certa relação. Um espirito bem educado esthetica-mente, sem emprêgo de regoa e compasso, reconhece muitas vezes, apenas por sentimento, que ha desharmonia naquelle conjuncto. Medindo-se então as diversas partes, reconhece-se a justeza do sentimento, verificando-se que foi violada a proporção.

Egualmente, sabe-se que o que distingue uma nota musical da seguinte é a relação do numero de vibrações. Assim, pois, não

havendo a relação exacta do numero de vibrações de cada nota para a seguinte, diz-se que o instrumento está desafinado. A pessoa que tiver o ouvido normalmente musical, reconhece que ha desharmonia nesses sons e, o que mais é, ella é capaz de harmonisar esses sons de modo a restabelecer a escala musical sem contar as vibrações, como fazem ordinariamente os afinadores de piano e outros instrumentos de musica. Sem a noção de proporção, não poderiamos comprehender esse phenomeno puramente esthetico.

Ha ainda algumas noções de que só a geometria póde dar uma idéa ao mesmo tempo clara e precisa. Taes são, por exemplo, as idéas de *egualdade*, *semelhança* e *equivalencia*. Duas figuras são eguaes, quando têem a mesma fórma e as mesmas dimensões; são semelhantes, quando feitas egualmente mas em escalas diversas, segundo a bella definição de Clairaut, o que exige a egualdade dos angulos e a proporcionalidade dos lados. Finalmente, duas figuras são equivalentes, quando têem o mesmo comprimento, se são linhas, a mesma área, se são superficies, ou o mesmo volume,

se têem tres dimensões. Dois polygonos regulares, do mesmo numero de lados, podem não ser eguaes e, nesse caso, tambem não são equivalentes, mas são necessariamente semelhantes. Duas figuras eguaes são por consequencia semelhantes e equivalentes.

A noção de incommensurabilidade é egualmente peculiar á geometria, e só a razão theorica póde reconhecer esse attributo, porque as grandezas, diminuindo além de certo limite, escapam aos nossos sentidos, mesmo armados dos melhores instrumentos.

Diz-se que duas linhas são incommensuraveis quando não existe uma terceira linha que se applique exactamente em cada uma das duas um certo numero de vezes sem deixar resto. Póde-se procurar uma medida commum aproximada. Essa pesquisa consiste em applicar a maior sobre a menor, a menor sobre o primeiro resto, o primeiro resto sobre o segundo, o segundo sobre o terceiro e assim successivamente, o ultimo resto, isto é, aquelle em que nos detivermos, será a medida commum aproximada.

Não havendo uma medida commum

entre as linhas dadas, a sua relação é fatalmente inçada de erro. O que distingue a razão abstracta da razão concreta é que o erro nas relações incommensuraveis póde ser tão diminuido quanto se queira. E' assim que, por mero diletantismo, Richter calculou a relação entre a círcumferencia e o diametro com a aproximação de 333 algarismos decimaes.

A proposito desta aproximação Lehmann observa que, se se calcular o volume de uma esphera cujo raio seja egual a 8 trilhões de kilometros, que é a distancia da nebulosa mais afastada de nós, segundo Herschell, e se tomar π, não com 333 decimaes, mas apenas com a aproximação de 90, o erro commettido será menor que o volume de um cubo, tendo a aresta egual a 1 millesimo de centimetro, isto é, um volume menor que o menor corpo observado ao microscopio.

As relações apanhadas pela razão concreta ficam sujeitas ao gráu de perfeição do instrumento material de que nos servimos.

Por falta de cultura mathematica, principalmente da mathematica sob o seu aspecto

logico, muitas pessoas e, dentre ellas, escriptores de nota, dizem que uma quantidade é incommensuravelmente grande, quando querem dizer que ella é muito grande. Ha nesta expressão nada menos de dois erros, que cumpre assignalar. Primeiramente, uma grandeza, de per si só, não póde ser commensuravel nem incommensuravel. Duas grandezas é que podem ser conjunctamente commensuraveis ou incommensuraveis, segundo têem ou não uma medida commum, e isso não depende do tamanho dellas em si mesmo, e sim da sua relação. Tão incommensuravel é a relação entre uma circumferencia de raio egual a um millimetro e o seu diametro, como entre uma circumferencia cujo raio fosse egual ao raio da terra e o seu diametro.

E' por abreviação de linguagem que se diz que um numero é incommensuravel, em vez de dizer-se que esse numero representa a relação de duas grandezas incommensuraveis. Mas esse proprio numero não é grande por exprimir uma relação incommensuravel. O valor de π escripto com 333 algarismos é, ainda assim, menor que o numero 4, representado por um só algarismo.

E' a mathematica que nos ensina a empregar theoricamente o artificio consistindo em substituir todos os elementos de uma questão ou parte delles por outros, tendo entre si e com os elementos proprios relações conhecidas, de modo a tornar possivel ou mesmo a facilitar a sua ligação.

A theoria dos logarithmos apresenta um exemplo muito evidente desse recurso logico, pois consiste em substituir os numeros dados sobre que se tem de operar por outros que lhe são peculiares de modo que, em vez de operar sobre os numeros naturaes, se opéra sobre os numeros artificiaes. Em vez de multiplicar os proprios numeros, sommam-se os seus logarithmos, em vez de dividir um numero dado pelo outro, opéra-se por subtracção sobre os numeros artificiaes que lhes correspondem. Por meio de uma taboa adrede preparada, passa-se dos numeros artificiaes ou logarithmos para os numeros naturaes.

Devemos encarar o emprêgo numerico dos logarithmos como o exemplo mais claro e preciso dos methodos nas sciencias. Elles têem por fim dar á nossa intelligencia um instrumento que possa augmentar a

sua força. Se o emprêgo arithmetico dos logarithmos simplifica as operações numericas e nos torna portanto mais aptos a calcular rapidamente, podemos considerar essa theoria como fornecendo um instrumento para augmentar o nosso poder intellectual. A machina, ao ver de Lazaro Carnot, é todo corpo que se interpõe a dois ou mais, para transmittir e modificar a acção de um delles sobre o outro em condições dadas, conforme o fim que se tem de preencher. Ella presta, por conseguinte, á nossa actividade um serviço analogo ao dos methodos nas sciencias e ao dos logarithmos em arithmetica, visto que augmenta o nosso poder physico na producção industrial.

A solução do problema fundamental da trigonometria consiste em calcular tres elementos de um triangulo, conhecidos os outros tres. Para isso, torna-se necessario estabelecer tres equações a tres incognitas, ligando simultaneamente os lados e os angulos dos triangulos. Mas, como exprimir essas ligações, se não ha propriedade alguma conhecida que indique relação entre taes elementos? Ha a lei de Thales, ligando apenas os angulos do triangulo. Ha

o theorema theocratico dos tres quadrados, conhecido por—theorema de Pythagoras,—estabelecendo relação entre os tres lados do triangulo rectangulo e que se póde estender a qualquer triangulo mediante a projecção de um lado sobre outro. Mas não ha theorema que relacione os lados com os angulos.

Neste caso, o genio de Hipparco, inventor da trigonometria, substituiu os angulos pelas cordas dos arcos que lhes correspondem, procurou a relação que existe entre os lados e essas cordas, e achou que elles são proporcionaes ás cordas dos angulos oppostos.

Em vista disso, é preciso no cálculo dos lados substituir os angulos pelas cordas dos arcos que lhes são inherentes. Tambem quando calculamos um angulo, vamos obtel-o por meio da sua corda. E' indispensavel portanto o uso de uma taboa para que se possa, a cada instante, passar do angulo á corda e, inversamente, da corda ao angulo.

A concepção de Leibnitz sobre a geometria infinitesimal consiste essencialmente em substituir um contorno contínuo e curvo

por um contorno discontínuo e formado de elementos rectilineos ou planos infinitamente pequenos. As linhas curvas foram substituidas por uma série de elementos rectilineos infinitamente pequenos; em vez das superficies curvas, empregaram-se superficies constituidas de porções infinitesimaes do plano. Estendendo essa concepção á mecanica, encarou-se o movimento variado como composto de uma serie de movimentos uniformes e infinitamente pequenos.

As ligações inexequiveis ou, pelo menos, muito difficeis entre os elementos contínuos e naturaes do problema, tornaram-se possiveis e faceis entre os elementos discontínuos e artificiaes. Para passar finalmente dos elementos artificiaes aos elementos naturaes da questão, não é possivel empregarem-se taboas, como nos casos anteriores, porque os elementos artificiaes não podem ter valor fixo, são grandezas variaveis, menores que toda a grandeza dada, ou, segundo a concepção mais precisa de Newton, são grandezas que têem por limite zero. A passagem faz-se por um cálculo especial denominado—*cálculo integral.*

E' nelle que reside a maior difficuldade do cálculo infinitesimal.

O artificio em que se baseia a geometria infinitesimal torna-se o typo eterno das hypotheses logicas, isto é, dos meios destinados apenas a facilitar a apprehensão das relações inductivas e deductivas que existem entre os elementos da questão. Reconhecendo a impossibilidade de assignalar valores precisos ás grandezas artificiaes, aprende-se que é mister não confundir jámais um artificio logico da intelligencia com a realidade objectiva. Um espirito que tiver entendido bem as regras logicas resultantes desses estudos não poderá tomar como lei objectiva a hypothese logica da physica sobre a constituição molecular dos corpos, nem qualquer dos innumeros artificios analogos que se têem creado nas sciencias para ligar os phenomenos.

O estudo inicial da geometria algebrica faz logo sentir a necessidade philosophica de distinguir as definições em—*caracteristicas* e *explicativas*. Essa distincção torna-se importante em todos os outros dominios scientificos, porque esclarece admiravelmente o modo de discernir o objecto que

se define, salientando bem o aspecto por que é elle encarado.

Para bem comprehender essa luminosa distincção, appliquemol-a principalmente ao dominio geometrico.

Definição caracteristica é aquella que, indicando uma propriedade mesmo verdadeiramente exclusiva, não faz conhecer o modo de formação do objecto. Dizendo que o circulo é a curva que, sob o menor perimetro, encerra a maior área, damos uma definição caracteristica dessa curva.

Definição explicativa é a que caracterisa o objecto por uma propriedade que exprime um dos seus modos de formação. Apresentando o circulo como a curva cujos pontos são todos equidistantes de um ponto fixo, enunciamos a sua definição explicativa.

Consideremos outros exemplos. Se dissermos que fracção é qualquer parte da unidade, damos uma definição caracteristica. Mas dizendo que fracção é uma divisão não effectuada, donde resulta a definição anterior, tem-se uma definição explicativa. Se definirmos fracção decimal como sendo aquella que tem por denominador

dez ou potencia de dez, distinguimos essa fracção por uma propriedade caracteristica. Definindo-a, porém, como resultando da divisão da unidade na razão décupla, definição que encerra implicitamente a anterior, apresentamos uma definição explicativa.

Biologicamente encarado, o animal póde ser definido de dois modos, por um attributo caracteristico, ou por uma propriedade explicativa do seu modo de nutrição. A definição caracteristica do animal baseia-se na dupla funcção que lhe é inherente, da sensibilidade e da contractilidade. A propriedade explicativa consiste em que elle se nutre de seres que já tiveram vida, donde a sensibilidade para percebel-os e a contracção para apprehendel-os.

Embora as definições caracteristicas resultem directa ou indirectamente das definições explicativas, ellas têem ás vezes mui grande importancia e tal que se não poderia auferir da definição explicativa senão a muito custo.

A geometria geral dá-nos multiplos exemplos dessa asserção. Recorramos ao caso já citado do circulo, por se tratar de

definições muito vulgares. Para reconher a natureza e traçar a curva cujos pontos são todos egualmante distantes de um ponto fixo, basta um pequeno esforço e tem-se logo a imagem do circulo e seu centro. Mas, para inferir a imagem do circulo da definição que é a curva que, sob o menor perimetro, encerra maior área, é necessario lançar mão do cálculo hypertranscendente ou das variações de Lagrange, a menos que se queira empregar os meios ainda mais penosos de que se servia Euler em casos identicos no seu—*Methodus inveniendi lineas curvas.*

Dos ensinamentos logicos que resultam da Mecanica geral

Se todo sêr affecta necessariamente uma *fórma*, tambem é incontestavel que toda existencia é acompanhada de *actividade;* de sorte que, sem esses dois attributos, geometrico e mecanico, não se poderia apreciar a economia universal reduzida á sua menor complicação. Assim, pois, a mecanica torna-se o complemento natural e indispensavel da mathematica.

Confundindo a actividade com a vida, o fetichismo animou todos os sêres. O theologismo, ao contrario, attribuindo toda actividade a sêres puramente espirituaes, destituiu a materia de qualquer acção. Esse vicio logico persistiu durante toda a transição metaphysica e ainda hoje perdura no ensino, visto que se apresenta a *inercia* como uma propriedade inherente á materia,

em vez de encarar-se como um artificio logico indispensavel á mecanica geral, artificio que reclama outro não menos indispensavel, a instituição das *fôrças*, consistindo essencialmente em considerarem-se como externas as acções internas inherentes á actividade dos corpos.

Dado o caracter peculiar á metaphysica, *fôrça* tornou-se uma entidade abstracta e foi concebida a principio como um deus espiritualisado, emquanto esse regime transitorio se achava mais proximo do estado theologico. Mais tarde, foi concebida como uma faculdade generalisada, podendo manifestar-se de diversos modos—pelo calor, pela luz, pela electricidade, pelo movimento, etc., quando a metaphysica veio confinar com a sciencia.

A actividade da materia foi admiravelmente bem percebida e assignalada por Leibnitz no seu Prefacio, por occasião das Notas que redigiu para annexar á obra de Locke.

«Não sei, diz Leibnitz, se será tão facil pôr de accôrdo este auctor comnosco e com os cartesianos, quando elle sustenta que o espirito não pensa sempre, e, parti-

cularmente, que fica sem percepção quando dorme sem ter sonhos. Diz elle que os corpos podem ser sem movimento; tambem as almas poderão ser sem pensamentos. Mas respondo aqui de modo um pouco diverso do que se costuma fazer. *Porque sustento que uma substancia não poderia ser sem acção, e que não ha jámais corpo sem acção e que até não ha corpo sem movimento.* A experiencia já se acha a meu favor, basta consultar o livro do illustre Sr. Boyle para se ficar persuadido disso.»

A esse respeito, disse Diderot nos seus *Principes Philosophiques sur la Matière et le Mouvement;* «O corpo, segundo alguns philosophos, é, por si mesmo, sem acção e sem fôrça; é uma terrivel falsidade bem contrária a toda boa physica, a toda boa chimica: por si mesmo, pela natureza das suas qualidades essenciaes, quer se considere em moleculas, quer em massa, elle é cheio de acção e fôrça».

Abundando nas mesmas considerações, escreveu Gall: «Só os theologos e metaphysicos podem abraçar o êrro que toda actividade e toda acção é devida a um sêr espiritual e que a inercia é a essencia da

materia. O peso das terras e dos metaes, as suas fôrças attractivas e repulsivas, as leis das suas fórmas, affinidades, antipathias para outras substancias, etc., são propriedades que resultam da mistura, da fórma, da proporção das partes integrantes desses corpos, e que estão tão intimamente identificadas com elles, que o aniquilamento dessas propriedades arrasta necessariamente a dissolução dos corpos: feita abstracção das propriedades de qualquer materia, a idéa da sua existencia desapparece.» F. I. Gall — Sur l'Origine des Qualités morales et des Facultés intellectuelles de l'Homme.

Finalmente, Augusto Comte systematisou tudo isso, adoptando como base logica da mecanica a dupla instituição da *inercia* e das *fôrças*. Se o estudo abstracto da geometria exige que se conceba a fórma independentemente dos corpos, pela instituição dos typos abstractos, e a concepção desses typos acarreta por sua vez a idéa do espaço, tambem o estudo abstracto da mecanica reclama a concepção do movimento independentemente não só dos motores como dos proprios móveis. A abstracção

dos motores nos leva naturalmente á hypothese logica da inercia da materia e a dos móveis implica a instituição das fôrças. Assim, pois, a inercia e as fôrças desempenham em mecanica o mesmo papel que o espaço e os typos em geometria.

Para considerarmos o corpo como inerte e suppôr externas as fôrças que actuam sobre elle, devemos desprezar as suas reacções internas *que têem por fim modificar o effeito das fôrças* SEGUNDO LEIS GERALMENTE DESCONHECIDAS.

A fôrça deve ser definida não só pela sua concepção, sempre relativa ao movimento, como pela sua medida baseada no equilibrio. Segundo esta distincção necessaria, podemos dizer que—fôrça é o movimento produzindo-se ou tendendo a produzir-se. Essa definição harmonisa-se tambem com o duplo sentido que nos faculta a sua percepção. Pela *visão* temos uma primeira percepção da fôrça, noção parcial, porque nos dá apenas a idéa do movimento reduzido á velocidade. E' devido á *musculação* ou sentido muscular que completamos a noção da fôrça, pela idéa de pressão, tendendo a produzir o movi-

mento. Só a musculação nos póde facultar a comprehensão de que a fôrça é proporcional á massa do corpo em movimento e á sua velocidade.

A hypothese logica da inercia exige naturalmente a concepção de *systema*, segundo a qual o corpo é tomado como um aggregado de pontos materiaes, guardando entre si invariavelmente as mesmas distancias para caracterisar o estado solido, ou mudando de posição segundo uma certa lei, como exige a consideração do estado fluido. Dahi a distincção dos systemas em variaveis e invariaveis. A idéa de systema em mecanica representa o mesmo papel que a de *organisação* em biologia.

Não comprehendendo bem essas instituições logicas, taes como as creou a intelligencia altamente philosophica dos grandes pensadores que têem elaborado a mecanica geral, alguns geometras secundarios têem querido vêr erros em certas differenças que necessariamente hão de existir entre o sêr concreto e o typo abstracto a que deve ser assimilado.

Confundindo um conjuncto de corpos materiaes que formam um todo, tendo por-

tanto reacções internas, com o typo abstracto de systema, tal como se concebe em mecanica geral, o Sr. J. Bertrand achou que o enunciado do theorema geral da conservação das forças vivas dado por Augusto Comte está errado, porque não se applica exactamente, isto é, sem nenhuma modificação, ao nosso systema planetario. O pretendido êrro de Augusto Comte foi o mesmo êrro de Huyghens, João Bernoulli, Daniel Bernoulli, Lagrange, Lazaro Carnot e de todos os genios mathematicos, que não confundiram o abstracto com o concreto.

E' preciso filiar historicamente o pensamento de Leibnitz sobre a actividade da materia a um grande acontecimento scientifico que houvesse vigorosamente reportado o espirito occidental ás crenças espontaneas do fetichismo. Foi essa a importancia logica da doutrina do movimento da terra. Com effeito, a idéa desse movimento leva-nos a considerar o nosso planeta como um astro essencialmente activo e faz os sêres que nelle existem participar da sua actividade, ficando o repouso na terra como simplesmente relativo.

De outro modo, tambem esse aconteci-

mento concorreu poderosamente para a emancipação da razão humana, fazendo-a passar da idéa absoluta de *universo* para a concepção relativa de *mundo*.

«Antes, diz Augusto Comte, que a mecanica tivesse convenientemente surgido, o espirito mathematico, reduzido ao dualismo entre o cálculo e a geometria, só poderia offerecer uma combinação essencialmente immovel, desprovida de ligação scientifica e portanto logica, como o conjuncto do surto theorico. E' por isso, continúa elle, que a sua evolução tinha ficado sinceramente compativel com o ascendente universal do theologismo ou do ontologismo, não obstante o contraste dos methodos.»

A constituição da mecanica geral apresenta-nos o melhor typo de perfeição logica para se discernir bem o emprêgo dos methodos inductivo e deductivo. De facto, como se acha hoje concebida e coordenada, a mecanica compõe-se de tres leis fundamentaes apanhadas por inducção no mundo exterior, e a essas leis se prendem dois appendices egualmente inductivos; tudo o mais, isto é, todo o corpo da doutrina, é tirado por deducção dessas leis fundamentaes.

Posto isto, a mecanica geral, tomada no seu conjuncto, exige uma lei que presida ao movimento isolado, outra que permitta a composição dos movimentos e, finalmente, outra que regule a communicação dos movimentos.

A primeira lei do movimento devemol-a a Kepler, o qual estabelece que todo movimento é naturalmente rectilineo e uniforme. Essa lei da persistencia foi confundida com a instituição da inercia emquanto se pretendeu explicar o que só se póde observar.

Cumpre annexar á lei de Kepler um complemento egualmente inductivo, devido a Lazaro Carnot. Quando uma ou mais fôrças actuam sobre um corpo, é preciso conceber a combinação das fôrças essencialmente activas com as fôrças puramente passivas. E' mister pois julgar a direcção sem contemplar o acto, que não póde então realisar-se. A inducção mostra-nos que a resistencia é dirigida segundo a normal á superficie correspondente.

A segunda lei do movimento só póde ser attribuida á Galileu, fundador directo da dynamica. Ella consiste na coexistencia espontanea de quaesquer translações,

realisando-se cada uma como se as outras cessassem.

E' em virtude desta lei que os nossos movimentos dentro de um vehiculo são independentes do movimento de translação do mesmo vehiculo; elles effectuam-se como se a translação geral do systema não se désse. Claro é que esta lei só se applica ás translações, ficando portanto isentas as rotações. Todo esse principio se resume finalmente no parallelogramma das translações. A essa lei devemos referir a proporcionalidade das forças ás velocidades, e a immobilidade de um ponto sujeito a duas forças eguaes e contrárias, posto que seja isso geralmente considerado como um axioma de estatica.

Essas duas leis, de per si só, bastam para todos os problemas que a elaboração preparatoria da dynamica exigia, o que explica o longo intervallo historico que as separa da terceira. Ellas devem ser tidas como inseparaveis, porque cada uma se torna confusa e mesmo esteril sem o concurso da outra.

Embora implicitamente esboçada antes por diversos geometras, a terceira lei deve

ser attribuida a Newton. Ella proclama a egualdade constante da reacção á acção, comtanto que cada uma dellas seja convenientemente medida.

Essa lei encerra implicitamente um principio que poderia considerar-se como complementar — o da proporcionalidade dás forças ás massas e ás velocidades.

De accôrdo com o espirito philosophico preponderante no seculo XVII, esse principio foi tomado como inductivo e, para fundamental-o, foram instituidas muitas experiencias curiosas. A theoria do choque apparece aqui opportunamente como importante verificação, não só do principio da proporcionalidade das forças ás massas e velocidades, como da propria lei de Newton. Estabelecendo as hypotheses extremas que exige a theoria dos corpos completamente inelasticos e dos corpos perfeitamente elasticos, podem-se conceber como intermediarios todos os gráus de elasticidade, que, sem interesse algum para a theoria, são entretanto reclamados pela razão concreta.

A' lei de Newton é preciso accrescentar um complemento tão inductivo como deductivo; tal é o *principio da mutualidade*

que, esboçado por Huyghens e constituido por Jacques Bernoulli, só foi systematisado por d'Alembert.

Seja-nos licito algum desenvolvimento sobre o historico dessa questão, já porque foi ella a origem da dynamica, já porque careceremos dos seus dados para elucidar assumptos de que nos vamos occupar posteriormente.

Lendo as epistolas de Descartes, Huyghens encontrou as primeiras pesquisas sobre o centro de oscillação no celebre problema que Mersenna tinha proposto aos geometras do seu tempo. Tratava-se de achar o comprimento de um pendulo simples cujas oscillações se fizessem ao mesmo tempo que as de um pendulo composto.

Retomando o problema com mais generalidade, Huyghens propoz se a achar o comprimento de um pendulo simples synchrono com um pendulo composto a cujo fio se liga um ou mais pesos em differentes distancias do ponto de suspensão. A solução desse problema exigia que se conhecessem as alterações que as ligações dos diversos corpos produzem no systema. Para isso, Huyghens instituiu uma proposição

preliminar consistindo em que, se os corpos descem pela acção exclusiva da gravidade, e num dado instante são separados uns dos outros, cada um delles subirá á mesma altura a que chegaria o centro de gravidade commum, altura que se acha no mesmo nivel do ponto donde partiram. Tal é o germe do principio indirecto que mais tarde se chamou—da *conservação das fôrças vivas*.

Posteriormente, Jacques Bernoulli retoma o problema, e começa figurando o caso em que haja apenas dois pesos eguaes ligados a um fio inflexivel e recto. Observa primeiramente que o peso mais proximo do ponto de suspensão tem menos velocidade do que se funccionasse livremente, isto é, sem ligação com outro. Inversamente, o pêso mais baixo adquire mais velocidade do que oscillando livremente. Donde resulta que a velocidade perdida pelo primeiro pêso se communicou ao segundo. Bernoulli reconheceu que essa communicação se faz por meio de uma alavanca movel em tôrno do ponto de suspensão, de modo que a perda do primeiro pêso está para o ganho do segundo em razão inversa dos seus braços de alavanca, isto é, das suas distancias ao ponto de suspensão.

Depois da publicação de um trabalho de l'Hôpital sobre o mesmo assumpto, Jacques Bernoulli volta á questão e considera os movimentos que a gravidade imprimiria a cada corpo independentemente da sua ligação, compara-os com os movimentos que elles têem effectivamente em virtude das suas ligações e decompõe estes movimentos effectivos em movimentos imprimidos e movimentos ajuntados ou tirados que se devem contrabalançar, e segundo os quaes o pendulo deve estar em equilibrio. Fica assim reduzido um problema de dynamica á pura estatica. Assim conseguiu elle encontrar fórmulas geraes para determinar o centro de oscillação dos corpos de qualquer figura, demonstrar a identidade desses centros de oscillação e dos centros de percussão e demonstrar finalmente o accôrdo entre a sua theoria e o principio de Huyghens.

A solução desse problema suscitou muitos desafios entre os geometras para a solução de questões analogas, ainda mais complicadas, consistindo geralmente em determinar os movimentos de diversos corpos que se comprimem ou distendem por

meio de fios inflexiveis, ao longo dos quaes elles podem correr livremente, tendo soffrido quaesquer impulsos, systemas esses abandonados a si mesmos ou sujeitos a mover-se sobre certas curvas ou superficies.

Coube finalmente a d'Alembert a gloria de crear um methodo, geral e directo, de pôr em equação todos esses problemas e, o que mais é, de transformar todas as questões de movimentos dos systemas variaveis e invariaveis em questões de equilibrio, reduzindo assim a dynamica á estatica. O seu methodo, isto é, o principio da mutualidade, appareceu pela primeira vez, em 1743, no seu *Traité de Dynamique*.

Esse principio consiste em que sempre deve existir *equilibrio* entre as fôrças primitivas de que todos os corpos do systema estão isoladamente animados e as fôrças proprias dos movimentos effectivos, quando estas são todas tomadas em sentido contrário. Quer isto dizer que a differença entre as fôrças que são applicadas ao systema e as fôrças proprias dos seus movimentos effectivos, nos dá as fôrças perdidas; essas fôrças fazem equilibrio entre si. O principio da mutualidade fica mais bem

estabelecido assim, substituindo-se a noção primitiva de egualdade pela concepção definitiva de equilibrio entre as fôrças perdidas e as ganhas no conflicto.

Se as leis de Kepler e Galileu bastam, de per si só, para todas as noções relativas ao movimento de um ponto, a lei de Newton é incapaz de resultado analogo para com a estatica dos systemas, ainda mesmo secundada pela lei da mutualidade. E' o principio das *velocidades virtuaes* que vem reduzir o equilibrio dos systemas ao equilibrio dos seus diversos elementos, como a lei da mutualidade converte a dynamica dos systemas na estatica dos systemas. Esse principio remonta a Galileu, que o esboçou, mas a sua extensa applicação só foi feita depois dos trabalhos de João Bernoulli e Varignon.

Para ser bem instituido, esse principio deve ser primeiramente considerado em relação ao ponto e só depois com referencia ao systema. Relativamente ao ponto, é preciso ainda distinguir o caso do ponto livre daquelle em que o ponto é retido numa linha ou superficie. Quanto ao ponto livre, elle torna-se uma consequencia da lei

de Galileu e consiste em que a projecção da resultante sobre qualquer eixo é equivalente á somma de projecções de todas as componentes. Relativamente a um ponto sujeito a mover-se sobre uma linha ou superficie, a mesma condição convem sem que a resultante seja nulla, porque a sua direcção fica normal á curva ou á superficie, mas o deslocamento, a principio qualquer, torna-se agora infinitesimal.

No caso do equilibrio dos systemas, elle consiste em que—quando os elementos de um systema soffrem um deslocamento infinitesimal compativel com as suas ligações, a somma algebrica dos momentos virtuaes das fôrças applicadas exteriormente a esse systema é nulla.

O principio das velocidades virtuaes permitte conhecer-se o augmento de fôrça produzido por uma machina sem se conhecer a natureza nem mesmo a construcção da machina, mas a simples relação das velocidades simultaneas do ponto em que está applicada a potencia e do ponto a que essa potencia é transmittida pela machina.

Inspirado nesse util emprêgo do principio das velocidades virtuaes ás machinas,

Lagrange chegou a formular uma lei analoga de optica em virtude da qual, sem se conhecer a disposição interior de um telescopio ou de um microscopio, se póde julgar da sua fôrça pela simples relação do diametro da abertura da objectiva com o diametro da abertura da ocular.

Este longo preambulo é util e até indispensavel por diversas razões. Primeiramente, convem que assignalemos a restituição da actividade á materia como um dos mais importantes resultados da philosophia moderna naturalmente suscitada pelo dogma do movimento da terra. Em segundo logar, a exposição historica da creação da mecanica geral, mesmo de um modo muito succinto como fizémos, tem a vantagem de revelar a marcha da intelligencia nos grandes trabalhos mentaes, bem como os diversos artificios logicos que a razão theorica emprega para ligar os phenomenos e apanhar as leis que os regulam. Finalmente, reconhecendo a identidade entre a materia viva e a materia não viva, como decorre dos trabalhos de Lavoisier para fundar a chimica moderna, podemos estender aos corpos vivos a actividade da mate-

ria e averiguar como essa actividade espontanea se harmonisa com a actividade vital, isto é, como as leis da mecanica se manifestam nos phenomenos biologicos, sociologicos e moraes.

Trata-se agora de uma generalisação das leis fundamentaes do movimento que, nem os seus creadores, nem os systematisadores da mecanica podiam realisar, porque isso reclama uma vasta elaboração scientifica que ainda não se tinha dado.

Reconhecida a identidade entre a materia organisada e a materia puramente mineral, era preciso caracterisar a vida de modo que ella não fosse agora englobada e confundida com a actividade peculiar á materia, segundo a inspiração espontanea do fetichismo.

Além dessa idéa positiva da vida, era mister a creação da biologia para que se tornasse possivel a fundação da estatica e da dynamica social, servindo por seu turno de base á sciencia final, á Moral positiva. Sem esta serie de conhecimentos, sem esta successão ininterrupta de observações guiadas pelo methodo positivo, seria impossivel a extensão das leis do movimento aos

phenomenos superiores evitando as aberrações do materialismo. Com este criterio e taes elementos scientificos, é perfeitamente possivel perceber como as contingencias mecanicas a que o homem está sujeito se combinam com as leis biologicas, sociologicas e moraes que o dominam. Mas, alem disso, mostraremos, embora perfunctoriamente, a combinação dessas leis mecanicas com as outras manifestações da actividade da materia.

Retomemos o encadeamento dos grandes trabalhos scientificos e philosophicos que nos vão permittir a generalisação das leis da mecanica. As pesquisas de Buffon serviram de base ás concepções de Bichat não só relativamente á vida e á differença entre a vida e a morte, como tambem sobre a distincção entre a vida organica e a vida animal. Mas a definição de vida, abrangendo o que ha de commum desde o micróphyto até ao homem, só foi dada por Blainville, mostrando que ella consiste no duplo movimento ao mesmo tempo geral e contínuo de composição e de decomposição.

Distinguindo a vida animal da vida or-

ganica, Bichat teve de crear uma concepção anatomica de accôrdo com o facto physiologico para o quê, admittiu o tecido cellular como o primordial e séde da vida organica ; devidamente modificado produz os tecidos muscular e o nervoso nos quaes reside a vida animal, subordinando assim a anatomia á physiologia. A obra de Bichat serviu de fundamento aos trabalhos de Gall que, sob esse aspecto, consistiam essencialmente em provar que o sentimento, e a intelligencia são funcções do cerebro e que o cerebro é um prolongamento do systema nervoso.

Reconhecida a dependencia dos phenomenos superiores para com os inferiores, devemos considerar a constancia mecanica das direcções e velocidades como um caso particular da persistencia espontanea de qualquer actividade, physica ou physiologica, corporal ou cerebral, tanto collectiva como individual.

Tomemos qualquer manifestação da actividade physica dos corpos, o peso, o calor, a electricidade, etc., e veremos a tendencia a persistir sempre o estado de equilibrio ou de movimento. Consideremos a actividade

chimica ou específica dos corpos, tambem notaremos egualmente a mesma tendencia a persistir o equilibrio ou o conflicto chimico.

Na physica, bem como na chimica, o emprêgo logico da lei da mutualidade consiste primeiramente em considerar a acção de dois ou mais corpos sobre um outro independentemente da reacção desse outro sobre os primeiros ; depois em considerar separadamente a acção de cada um como se todos elles não agissem simultaneamente, chegando assim a encontrar a resultante da acção combinada.

Ha na physica e na chimica exemplos bem simples que revelam com muita clareza este preceito logico. Consideremos, por exemplo, diversos gazes num mesmo vaso de paredes inflexiveis, gazes que não se combinem chimicamente, a pressão total dessa mistura contra as paredes do vaso é egual á somma das pressões exercidas por cada um delles. Na sua—*Théorie de la Chaleur*—Résal faz uma interessante applicação do parallelogramma das forças á composição do calor. Considerando a acção calorifica de um ponto situado na origem

das coordenadas de um systema de eixos rectangulares, elle decompõe a intensidade calorifica em tres componentes projectadas sobre tres eixos, o que constitue uma bella extensão da lei de Galileu aos phenomenos thermicos.

Na acção chimica de diversos corpos em estado de simples mistura, como no caso do oxygenio e o azoto formando o ar atmospherico, reconhece se facilmente e com muita clareza a acção isolada de cada um na respiração vegetal e animal, bem como a resultante da sua acção simultanea.

Quando se quer apreciar a combinação de dois phenomenos quaesquer segundo a lei da coexistencia, é necessario ter em vista o sentido em que cada phenomeno se dá, como é indispensavel na composição das forças ter em conta a direcção em que cada uma dellas actua. O phenomeno da interferencia da luz dá-nos um bello exemplo na descoberta de Thomas Young. Fazendo actuar simultaneamente sobre a mesma superficie raios de uma mesma fonte, seguindo porém caminhos um pouco deseguaes, aquelle grande physico produziu a obscuri-

dade em vez da luz, ao passo que cada raio isoladamente dava luz brilhante. Inspirados nesse curioso phenomeno, Foucault e Fizeau realisaram analoga descoberta relativamente ao calor e provaram que, combinando-se convenientemente calor com calor, se póde produzir frio.

A *continuidade* caracteristica dos phenomenos vitaes, é a manifestação evidente da grande lei da persistencia. Mas é mister que se examine essa continuidade não só relativamente aos phenomenos da vida vegetativa senão tambem aos da vida animal, onde parece que ella soffre alguma alteração. Na vida organica, a continuidade revela-se pelas duas leis relativas á renovação material a que se acha sujeito todo sêr vivo e á redroducção de outro sêr vivo semelhante. Na vida animal, a continuidade soffre uma alteração na sua fórma, e a persistencia apparece na intermittencia dos phenomenos. A necessidade a que está sujeito cada animal de exercicio e repouso alternativo de todas as funcções da sua vida de relação, mesmo das mais nobres, é a consequencia da grande lei de Kepler. Como resultado dessa intermittencia, vem a lei do habito.

A lei da coexistencia evidencia-se admiravelmente na lei do aperfeiçoamento. Com effeito, cada animal é apto ao aperfeiçoamento estatico e dynamico inherente a todos os phenomenos de relação, porque todos os esforços são susceptiveis de se combinar sem se perturbar, realisando-se cada um como se os outros cessassem.

A lei da evolução, consistindo em que todo o sêr vivo se desenvolve, declina e finalmente termina com a morte, apresenta-se-nos como a verificação, quer da lei da persistencia, quer da lei da coexistencia. Em virtude da primeira, o sêr vivo tende a persistir indefinidamente sem nenhuma alteração, em consequencia da segunda, essa acção combina-se com outras, a principio no mesmo sentido augmentando a acção primitiva, mais tarde em diversas direcções e até em sentido contrário, occasionando o declinio.

A lei biologica da hereditariedade prolongada até aos phenomenos moraes e intellectuaes e concebida sob a fórma com que a theologia nol-a apresentou — *do peccado original* — ainda é uma das manifestações superiores da lei da persistencia.

Sem a persistencia e coexistencia dos sentimentos, das imagens e dos signaes, não poderia haver nenhum trabalho mental e, portanto, não poderia haver logica.

Restituindo a actividade á materia, reconhece-se facilmente hoje, que uma acção qualquer, mecanica, physica, ou mesmo chimica, provoca reacções que tambem se manifestam por diversos effeitos. Produzindo um choque violento num corpo de substancia imperfeitamente elastica, vamos encontrar a reacção em diversos phenomenos ; primeiramente notamos o mais conhecido e pronunciado, que é o do movimento, em seguida um certo augmento de temperatura, producção de som, electricidade, etc. Foi por isso que, falando da instituição da inercia, como um artificio logico indispensavel á mecanica geral, dissémos que, nesse ponto de vista puramente abstracto, se desprezam as reacções internas do corpo que têem por fim modificar o effeito das forças segundo leis geralmente desconhecidas.

A pesquisa dessas leis póde-se dizer que data do meado do seculo XVIII. Nessa epoca, Black descobriu que, para se operar uma determinada transformação num corpo,

é precisa uma certa quantidade de calor, a que chamou calor latente—*latent heat*. Mais tarde, Crawford reconheceu que as quantidades de calor absorvidas por corpos de composição differente, para produzirem o mesmo effeito, são diversas. Cada corpo exige quantidade especifica de calor Lavoisier e Laplace entregaram-se á determinação precisa da relação que existe entre a mudança de estado dos corpos e a quantidade de calor absorvida.

Elles chegaram até a formular o seguinte principio: «Se numa combinação ou mesmo qualquer mudança de estado, ha diminuição de calor livre, todo elle reapparecerá, quando as substancias voltarem ao seu primitivo estado, e, reciprocamente, se na combinação ou mudança de estado ha um augmento de calor livre, esse novo calor desapparecerá na volta das substancias ao seu primitivo estado.»

Enunciando esse principio, os seus illustres auctores assignalavam a equivalencia calorifica não só das diversas combinações chimicas senão tambem das mudanças de estado dos corpos. Estava pois aberta a vereda para a determinação e as applica-

ções do equivalente mecanico de calor, cujos estudos foram, logo após, iniciados pelo Conde de Rumford na sua memoria—*An inquary concerning the source of heat excited by friction*—publicado em 1798 no Phil. Trans. abridged, t. XVIII, e mais tarde por Sadi Carnot, nas suas—*Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines*—publicadas em Pariz no anno de 1828.

Estudando as transformações que as substancias soffrem em virtude das suas combinações chimicas, Lavoisier reconheceu que o seu desapparecimento não provém jámais da sua destruição, mas de uma combinação em que ella vae reapparecer revestindo outra fórma differente, ou de uma simples mudança de estado, como na passagem do liquido para o gazoso. Isso levou-o a demonstrar de modo irrefutavel—*que a materia não se destróe, transforma-se*—lei presentida pelos antigos philosophos que inspiraram a Lucrecio estas memoraveis palavras: *ex nihilo nihil, nihil in nihilum verti potest.*

Ao passo que, a respeito da materia, Lavoisier reconhecia e demonstrava magis-

tralmente a sua indestructibilidade, relativamente á fôrça, que é apenas uma propriedade da materia, elle assignalava a sua relação com as outras propriedades, e procurava determinar os respectivas equivalentes.

Entretanto,outros pensadores eminentes, mais experimentadores que philosophos, conceberam a fôrça como um sêr ou uma entidade abstracta e generalisada, segundo os habitos metaphysicos, podendo manifestar-se tanto pelo movimento como por outros phenomenos successivos de calor, electricidade e actividade chimica, suscitados uns pelos outros e formando uma verdadeira serie indefinida e periodica, porque movimento, calor, electricidade e actividade chimica, pelas suas relações, formam um ciclo. Admittida como permanente, embora transmutada, a fôrça ou, segundo a expressão mais em uso—a *energia*—ficou naturalmente sujeita á lei da indestructibilidade da materia.

Sabe-se que o theorema da conservação das forças vivas consiste em ser constante num tempo dado a somma das forças vivas de todos os corpos de um systema,

quaesquer que sejam as alterações que possam sobrevir no movimento de cada um emquanto elles agem uns sobre os outros por simples pressão.

Passando do abstracto ao concreto, é preciso ir restituindo, uma a uma, todas ou, pelo menos, as principaes circumstancias que foram systematicamente omittidas. Applicando ao caso das machinas, fôrça é é levar em conta os attritos das peças, a rigeza das cordas, a flexibilidade das peças que devem ser rijas, os choques e as proprias mudanças bruscas. Nestas condições, a machina perde parte da sua fôrça viva e Lazaro Carnot demonstrou que essa perda de fôrça viva é egual á somma das forças vivas devidas ás velocidades perdidas por essas mudanças. Dahi a necessidade de reduzir os attritos, a rigeza das cordas, a flexibilidade das peças que devem ser rijas, as mudanças bruscas e promover a diminuição dos choques pelo emprêgo de molas. Esse theorema torna-se, pois, o complemento necessario da lei da conservação das forças vivas.

Aproveitando com verdadeiro talento essas reacções internas que a razão theorica

abstráe e a razão prática attenua, o illustre engenheiro nacional, Professor Ennes de Souza, acaba de inventar um apparelho destinado a diminuir o effeito do choque pela reducção da fôrça viva. O seu apparelho é uma verdadeira machina, porque é um corpo interposto a outros dois para transmittir e modificar a acção de um sobre o outro, mas operando em sentido inverso, porque faz annullar quasi toda a fôrça viva, que é absorvida pelas reacções adrede e habilmente escolhidas. Para esse fim, o eminente engenheiro serve-se principalmente das propriedades physicas do chumbo, da agua e do ar. Essa util invenção, que o colloca em posto culminante entre os seus collegas mais distinctos, tambem o recommenda á gratidão pública pelo seu destino realmente humanitario.

A lei da equivalencia em biologia revela-se á primeira vista nas relações reciprocas entre o sêr vivo e o mundo exterior, quando se reconhece esse dualismo irreductivel. O mundo actua sobre o sêr vivo como *alimento, estimulante e regulador*, este, por sua vez, reage tornando-se o grande modificador do mundo, desde as alterações physico-

chimicas produzidas espontaneamente pelos vegetaes até á acção consciente e systematica do homem, melhorando em seu proveito a crôsta terrestre.

Sendo a sensibilidade e a contractilidade os dois attributos caracteristicos da vida animal, é evidente a alta importancia que nella assume o principio da equivalencia.

Nas relações reciprocas entre os sêres collectivos, tambem se nota a equivalencia entre a reacção e a acção. Todos reconhecem a influencia das nações, umas sobre as outras, bem como as suas reacções correspondentes. As revoluções e as guerras nada mais são que reacções pelas quaes o organismo social se oppõe ás forças que vêm perturbar o seu equilibrio.

No dominio moral, a lei da equivalencia encontra uma applicação ainda mais extensa e variada. Ninguem desconhece as reacções que o exemplo da virtude provoca no coração humano, ninguem ignora a variedade dos effeitos que se produz em nossa alma uma scena qualquer: ora é a alegria manifesta no riso, ora é a tristeza expressa no semblante e que se traduz muitas vezes pela lagrima. Qual é a alma bem forma-

da que desconhece os effeitos da gratidão? Ella é a mais nobre e bella reacção moral de que é capaz a natureza humana. Observem-se as variadissimas fórmas com que a physionomia revela as impressões que o quadro exterior produz, e ter-se-á uma verificação da reciprocidade da reacção á acção no dominio moral.

No trabalho cerebral, encontra-se uma importante extensão da lei da equivalencia. Um facto exterior actúa sobre os motores affectivos e excita qualquer dos nossos sentimentos, egoista ou altruista, despertando um desejo; essa excitação transmitte-se á intelligencia, que indica a conveniencia ou inconveniencia da acção, e reage logo sobre a região motora, pondo em actividade, já o orgão dos movimentos excitados para executar o acto, já o orgão dos movimentos retidos para sustal-o.

Prevalecendo-nos dessa reciprocidade é que instituimos as artes que actuam sobre o homem, individual e collectivamente. A medicina, a politica, a educação, e as bellas artes fundam-se nas reacções que o organismo ou o conjuncto dos organismos

oppõem ás acções que se fazem produzir no seu interior.

E' preciso reconhecer o vasto e íntimo consenso que existe nos phenomenos biologicos, moraes e sociaes, para comprehender-se a dífficuldade que ha em isolar cada um, a fim de procurar e medir o equivalente expresso noutro tambem interior e, mais ainda, em phenomenos do mundo exterior.

O grande Lazaro Carnot, general e estadista da revolução franceza, já tinha o presentimento de serem extensivas as leis da mecanica aos dominios superiores por uma racional generalisação. Creando o seu principio da perda de fôrça viva que soffrem as machinas, elle alludia muitas vezes ao emprêgo que se póde fazer aos organismos biologicos e sociologicos, sujeitos como quaesquer outros ás fatalidades mecanicas.

Se é mistér, como demonstrou elle, evitar no movimento das machinas as mudanças bruscas e os choques, que fazem perder grande cópia de fôrça viva, tambem nos organismos releva conjurar as mudanças subitas, cuja perda de fôrça viva se manifesta então pela molestia, pela revolu-

ção e pelo crime. Se ao mecanico incumbe abrandar os choques por meio de molas, ao medico, ao estadista e ao philosopho, por mais forte razão, compete evitar ou, pelo menos, attenuar as mudanças bruscas, visto que os phenomenos correspondentes são mais modificaveis.